



***Facultad
de
Ciencias***

**Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y
Aplicaciones
(Stochastic Differential Equations and
Applications)**

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Óscar Mirones Alonso

Director: Rafael Granero Belinchón

Co-Directora: Paula Navarro Esteban

Febrero-2019

Resumen

Esta memoria recoge un estudio de las ecuaciones diferenciales estocásticas. Estas ecuaciones son importantes ya que modelan fenómenos inestables debido a la aleatoriedad de algunas de sus componentes. En el primer capítulo se estudia el movimiento browniano como proceso estocástico básico, su construcción y propiedades. En el segundo capítulo se desarrolla la teoría de integración estocástica de Itô y el Teorema de existencia y unicidad de solución. Se trata también la fórmula de Itô y ejemplos clásicos de ecuaciones diferenciales estocásticas. Finalmente, en el último capítulo se recogen aplicaciones numéricas orientadas a diferentes campos de estudio como las finanzas, la farmacología o la epidemiología.

Palabras clave: Ecuación diferencial estocástica, Movimiento browniano, Integral de Itô, Fórmula de Itô, Teorema de existencia y unicidad, Método de Euler.

Abstract

This report is focused on the study of stochastic differential equations. These equations model unstable phenomena due to the randomness of some of their components. The first chapter shows the Brownian motion as a basic stochastic process, its construction and properties. In the second chapter Itô's stochastic integration theory and existence and uniqueness Theorem are studied. Itô's formula and classic examples of stochastic differential equations are also studied. Finally, last chapter shows numerical applications to several fields such as finances, pharmacology or epidemiology.

Key words: Stochastic differential equation, Brownian motion, Itô's integral, Itô's formula, Existence and uniqueness Theorem, Euler's method.

*Dedicado a
mis directores Rafa y Paula, mis padres, mi hermano y mis compañeros de facultad.*

Índice general

Notación y conceptos básicos	V
Introducción	VIII
1. Movimiento browniano	1
1.1. Introducción al movimiento browniano	1
1.2. Construcción del movimiento browniano	3
1.3. Propiedades del movimiento browniano	9
2. Ecuaciones diferenciales estocásticas	14
2.1. Integración estocástica	14
2.2. Fórmula de Itô	22
2.3. Algunos ejemplos de EDEs	27
2.4. Teorema de existencia y unicidad	29
2.4.1. Dependencia continua del dato inicial	34
3. Simulaciones	36
3.1. Método de Euler	36
3.2. Simulación en el precio de las acciones	37
3.3. Simulación en farmacocinética	38
3.4. Simulación en epidemiología	40
A. Resultados conocidos	42
B. Códigos de MATLAB	44
B.1. Simulación en el precio de las acciones	44
B.2. Simulación en la farmacocinética	44
B.3. Simulación en epidemiología	45

Notación y conceptos básicos

En este capítulo introduciremos la notación que vamos a utilizar, así como varias definiciones, principalmente relacionadas con la teoría de la probabilidad. Hemos utilizado [4] como referencia principal. Empecemos con las definiciones básicas de espacio probabilístico y variable aleatoria. Para ello definimos previamente probabilidad y σ -álgebra.

Definición 1. Una σ -álgebra \mathcal{U} es una familia de subconjuntos del espacio total Ω con estas propiedades:

- i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{U}$.
- ii) Si $A \in \mathcal{U}$ entonces $A^c \in \mathcal{U}$, donde $A^c = \Omega - A$ es el complementario de A .
- iii) Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$, entonces $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{U}$. Los elementos $A_k \in \mathcal{U}$ reciben el nombre de sucesos.

Observación 1. Sea \mathcal{B} una familia de subconjuntos de Ω , la intersección de todas las σ -álgebras que contienen a \mathcal{B} es una σ -álgebra. Esta σ -álgebra la denotaremos como $\mathcal{U}(\mathcal{B})$ y se denomina σ -álgebra generada por \mathcal{B} . Además $\mathcal{U}(\mathcal{B})$ es la menor σ -álgebra que contiene a \mathcal{B} .

Definición 2. Sea \mathcal{U} una σ -álgebra de subconjuntos de Ω . Decimos que $\mathbf{P} : \mathcal{U} \rightarrow [0, 1]$ es una medida de probabilidad si satisface

- i) $\mathbf{P}(\emptyset) = 0, \mathbf{P}(\Omega) = 1$.
- ii) Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{U}$, entonces

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k).$$

- iii) Si A_1, A_2, \dots , son disjuntos en \mathcal{U} , entonces

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k).$$

- iv) En general, si $A_1, A_2 \in \mathcal{U}$ tales que $A_1 \subseteq A_2$ se tiene que

$$\mathbf{P}(A_1) \leq \mathbf{P}(A_2).$$

Conocidas ya la definición de σ -álgebra y probabilidad, nos disponemos a definir espacio probabilístico.

Definición 3. Sea Ω un conjunto, \mathcal{U} una σ -álgebra de subconjuntos de Ω y \mathbf{P} una probabilidad, llamamos espacio probabilístico a la terna $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbf{P})$.

Definición 4. Sea $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbf{P})$ un espacio probabilístico. Llamamos variable aleatoria (v.a.) a la aplicación

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que para cada $B \in \mathcal{B}$, se tiene que $X^{-1}(B) \in \mathcal{U}$, donde \mathcal{B} es la σ -álgebra de Borel en \mathbb{R} . Es equivalente a decir que X es \mathcal{U} -medible.

Definición 5. Sea $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbf{P})$ un espacio probabilístico, un suceso $A \in \mathcal{U}$ ocurre casi seguro (c.s) si $\mathbf{P}(A) = 1$. Equivalentemente, A ocurre casi seguro si A^c está contenido en un conjunto de medida nula.

A continuación, vamos a dar la notación que seguiremos durante el trabajo.

- Las procesos estocásticos los denotaremos como $X(t) \equiv X(t, \omega)$. Las letras mayúsculas son usadas para denotar v.a.'s. Aparecerán en negrita en el caso de vectores aleatorios.
- Designaremos $E(X)$ y $V(X)$ como la esperanza y varianza de la v.a. respectivamente.
- Denotaremos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ para expresar que la v.a. X tiene distribución normal con media μ y varianza σ^2 .
- Denotaremos como Ω el espacio de sucesos del espacio probabilístico.
- Generalmente la variable t representará tiempo, mientras que ω se utilizará para designar un punto muestral del espacio probabilístico.
- Utilizaremos la notación de Landau O para denotar el orden en módulo de un elemento o una v.a.

Uno de los conceptos más importantes es el de proceso estocástico, que aparecerá con frecuencia en la memoria. A continuación, damos su definición.

Definición 6. Sea $X = X(w)$ una v.a. que toma valores reales. Llamamos proceso estocástico a la sucesión $\{X(t) : t \geq 0\}$ de v.a.'s

Por tanto, para cada instante t tendremos una v.a. distinta representada por $X(t)$, con lo que un proceso estocástico puede interpretarse como una sucesión de v.a.'s cuyas características pueden variar a lo largo del tiempo. Otras nociones importantes que aparecerán con asiduidad son la independencia y la idéntica distribución de las v.a.'s

Definición 7. Sean A_1, A_2 dos sucesos, decimos que son independientes si

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2).$$

Para hablar de la idéntica distribución de las v.a.'s, debemos hablar primero de función de distribución.

Definición 8. Se llama función de distribución de la v.a. X a la función $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definida como

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Además si $X_1, \dots, X_m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son v.a.'s, llamamos función de distribución conjunta a

$$F_{X_1, \dots, X_m} : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$$

tal que

$$F_{X_1, \dots, X_m}(x_1, \dots, x_m) = \mathbf{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_m \leq x_m).$$

Definición 9. Sea X_1, \dots, X_n una sucesión de v.a.'s. Se dice que son idénticamente distribuidas si

$$F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x) = \dots = F_{X_n}(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Definición 10. Si A_1, \dots, A_n son sucesos en un espacio probabilístico, el suceso

$$A_{i.o} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ pertenece a infinitos } A_n\} = \limsup A_n$$

se dice que $A_{i.o}$ es infinitamente frecuente (“infinitely often”).

Definición 11. Sean X_1, \dots, X_n, \dots una sucesión de v.a.'s con $E(|X_i|) < +\infty$ para $i = 1, 2, \dots$. Si

$$X_k = E(X_j | X_1, \dots, X_k) \quad \text{c.s. } \forall j \geq k$$

llamamos a $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una martingala (discreta).

Definición 12. Sea $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ un espacio de medida. Se define $L^p(\Omega)$ como el espacio de las funciones medibles f que satisface

$$\int_{\Omega} |f|^p d\mu < +\infty.$$

Generalmente trabajaremos con espacios $L^2(0, T)$.

Introducción

En este trabajo queremos extender lo que sabemos sobre la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) a ecuaciones diferenciales donde exista un término aleatorio. Por ejemplo

$$\begin{cases} dX = b(X, t)dt + B(X, t)dW \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Esta ecuación diferencial recibe el nombre de ecuación diferencial estocástica (EDE). Así dW es una fuerza típicamente aleatoria relacionada con el movimiento browniano que afecta al sistema bajo nuestro estudio. Por ello en el primer capítulo estudiaremos y comprenderemos el movimiento browniano.

En el segundo capítulo de la memoria se desarrolla la teoría de integración estocástica que nos permitirá dar una definición para las integrales del tipo $\int GdW$ (siendo G un proceso estocástico). Estas integrales aparecen con frecuencia en el estudio y resolución de estas ecuaciones. Otra herramienta útil para el estudio de las EDEs es la fórmula de Itô. Por ejemplo, con la fórmula de Itô se prueba que la solución de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} dX = XdW \\ X(0) = 1 \end{cases}$$

es $X(t) = e^{W(t) - \frac{t}{2}}$ y no $\bar{X}(t) = e^{W(t)}$ como se podría pensar. Por último, se estudia el teorema de existencia y unicidad de solución así como se tratan algunos ejemplos de ecuaciones más conocidas como la ecuación de Langevin.

Estas ecuaciones modelan numerosos fenómenos en física, química, finanzas, biología, demografía, ... Así, estudiaremos modelos basados en EDEs para distintos campos de aplicación. Destacamos tres áreas de estudio diferentes: finanzas, farmacología y epidemiología. En el caso de las finanzas, veremos como se puede estudiar la fluctuación del precio de las acciones mediante el modelo de Black-Scholes. Por otro lado, en el área de farmacología y epidemiología discutiremos por qué una modelización con EDEs se ajusta más que una modelización con EDOs. Un ejemplo de ello es la variación de concentración de un fármaco suministrado en un organismo o el número de individuos afectados a lo largo del tiempo en una población pequeña. Para simular dichas ecuaciones utilizaremos el método de aproximación de Euler. Este método es una adaptación del método para EDOs con la salvedad que para simular los crecimientos del movimiento browniano se utiliza la distribución normal.

Capítulo 1

Movimiento browniano: construcción y propiedades

1.1. Introducción al movimiento browniano

En este capítulo introduciremos la idea de movimiento browniano, formalizaremos dicha idea y propondremos una construcción para el mismo. Estudiaremos también algunas de sus propiedades más características como el caso de su no diferenciabilidad. Dicha falta de regularidad nos supondrá un problema en el estudio de las EDEs.

Para este primer capítulo así como en el segundo nos hemos basado en [12]. Conocer el movimiento browniano es fundamental para comprender las ecuaciones diferenciales estocásticas, ya que interviene en ellas dotándolas de un componente aleatorio que representa dW .

Históricamente, el movimiento browniano surge entre 1826-1827 como consecuencia del estudio del biólogo y botánico escocés Robert Brown sobre el movimiento irregular que describían las partículas de polen en el agua. Brown notó principalmente que la trayectoria que realizaba una partícula de polen era bastante irregular. Además, al comparar el movimiento de dos partículas de polen diferentes se observaba que sus movimientos no tenían relación alguna. Los movimientos de dichas partículas mostraban bastante independencia entre ellos. A lo largo del tiempo han ido surgiendo nuevas relaciones entre el movimiento browniano y otros fenómenos. Por ejemplo, en 1900 Bachelier relacionó las fluctuaciones que se producían en el precio de las acciones con el movimiento browniano. Finalmente, en 1905, Albert Einstein publicó un artículo donde explicaba que el movimiento browniano era el resultado del polen movido por moléculas de agua individuales.

Para trabajar con el movimiento browniano lo modelaremos como una cadena de Markov. La idea intuitiva de cadena de Markov es, dado el valor $X(s)$ podemos predecir a partir de él los futuros valores de $X(t)$ tan bien como si tuviéramos la historia completa de valores que toma el proceso, anterior al tiempo s . Es decir, el valor que tome de manera inmediatamente anterior el proceso en un instante depende únicamente del valor que toma anteriormente. Por eso se dice que “los procesos solamente conocen su valor en el tiempo s pero no saben como han llegado hasta ese punto”.

Definición 1.1. Para cada punto ω del espacio probabilístico Ω , la aplicación $t \mapsto X(t, \omega)$ se llama camino muestral.

Así, estamos en disposición de definir qué se entiende por cadena de Markov.

Definición 1.2. Un proceso estocástico $X(t)$ que toma valores en \mathbb{R} recibe el nombre de cadena de Markov si satisface que

$$\mathbf{P}(X(t) \in B | \mathcal{U}(s)) = \mathbf{P}(X(t) \in B | X(s)) \quad c.s.,$$

donde B es cualquier subconjunto de la σ -álgebra de Borel en \mathbb{R} y $\mathcal{U}(s) := \mathcal{U}(X(r) : 0 \leq r \leq s)$ que es conocido como la historia del proceso hasta el tiempo r .

Ahora bien, una vez explicado cómo surgió este concepto y cómo vamos a modelarlo, vamos a desarrollar su justificación matemática. Para ello analizaremos el movimiento de una partícula sobre una cuadrícula bidimensional. Utilizaremos una técnica conocida como paso a límites con caminatas aleatorias y el Teorema de Laplace-DeMoivre [A.1](#).

Suponemos que la partícula se mueve a izquierda o a derecha una distancia Δx con probabilidad $1/2$. Consideramos $X(t)$ la posición de la partícula en el instante $t = n\Delta t$. Definimos

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i,$$

donde X_i son variables aleatorias independientes tales que

$$\begin{cases} \mathbf{P}(X_i = 0) = 1/2 \\ \mathbf{P}(X_i = 1) = 1/2 \end{cases}$$

Podemos interpretar que S_n nos indica los movimientos hacia la derecha que realiza la partícula en tiempo t . Por tanto, la posición en la que se encuentra la partícula en dicho instante puede ser expresado del siguiente modo:

$$X(t) = S_n \Delta x + (n - S_n)(-\Delta x) = (2S_n - n)\Delta x. \quad (1.1)$$

Asumimos que $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = d$ donde d es una constante positiva. Entonces por [\(1.1\)](#)

$$X(t) = \left(\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \right) \sqrt{n} \Delta x = \left(\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \right) \sqrt{td},$$

ya que $\Delta x = \sqrt{d} \sqrt{\Delta t}$ y $t = n\Delta t$. De este modo estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Laplace-DeMoivre:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(a \leq X(t) \leq b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{\sqrt{td}} \leq \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \leq \frac{b}{\sqrt{td}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{td}}}^{\frac{b}{\sqrt{td}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Así, finalmente obtenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{td}}}^{\frac{b}{\sqrt{td}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi dt}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2dt}} dx.$$

Por tanto, observamos que el movimiento que describe la partícula a lo largo del tiempo sigue una distribución $N(0, dt)$, con lo cual se tiene que los crecimientos del movimiento browniano son normales.

En nuestro estudio del movimiento browniano tomaremos la constante $d = 1$. Ahora estamos en las condiciones de poder establecer una definición de movimiento browniano.

Definición 1.3. *Un proceso estocástico de valores reales $W(t)$ se dice que es un movimiento browniano o proceso de Wiener si:*

- i) $W(0) = 0$ casi seguro.
- ii) $W(t) - W(s)$ es una distribución $N(0, t - s) \forall t \geq s \geq 0$.
- iii) Para todo tiempo $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, las variables aleatorias $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ son independientes. Esto quiere decir que los incrementos que se producen son independientes.

Es decir, la distribución de $W(t) - W(s)$ con $0 \leq s \leq t$ dependerá de la longitud de $t - s$. En particular se tiene que $E(W(t)) = 0$, $E(W(t)^2) = t$ para cada $t \geq 0$. Nuestro principal objetivo en este punto es construir el movimiento browniano. El método que desarrollaremos para esa construcción se basa en expresar $W(t)$ como una serie de funciones antiderivadas de una base ortonormal de $L^2(0, 1)$.

Lema 1.1. *Sean $W(t), W(s)$ dos movimientos brownianos unidimensionales. Entonces para $t \geq 0, s \geq 0$,*

$$E(W(t)W(s)) := \min\{t, s\}.$$

Demostración. Consideramos $t \geq s \geq 0$. Entonces

$$E(W(t)W(s)) = E((W(s) + W(t) - W(s))(W(s))),$$

puesto que la esperanza es lineal, $E((W(t) - W(s)) = 0$ y $W(t) - W(s)$ es independiente de $W(s)$ tenemos que

$$E(W(s)^2) + E((W(t) - W(s))(W(s))) = E(W(s)^2) + E((W(t) - W(s))E((W(s))),$$

dado que $E(W(s)^2) = s$, queda probado que

$$E(W(t)W(s)) = s = \min\{t, s\}.$$

□

1.2. Construcción del movimiento browniano

Existen diferentes construcciones del movimiento browniano. En nuestro caso, usaremos la construcción de Levy-Cielsiesky, la cual utiliza funciones de Haar. Veremos que dada una función $f \in L^2(0, 1)$ podemos expresarla como combinación lineal de funciones de Haar y que éstas constituyen una base ortonormal completa del espacio $L^2(0, 1)$. A continuación, definimos este tipo de función y vemos sus propiedades.

Definición 1.4. Sean $\{h_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ una familia de funciones definidas en $0 \leq t \leq 1$ tal que

$$h_0(t) := 1 \text{ para } 0 \leq t \leq 1$$

$$h_1(t) := \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \text{para } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

Si $2^n \leq k < 2^{n+1}$, con $n = 1, 2, \dots$ establecemos

$$h_k(t) := \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} & \text{para } \frac{k-2^n}{2^n} \leq t \leq \frac{k-2^n+\frac{1}{2}}{2^n} \\ -2^{\frac{n}{2}} & \text{para } \frac{k-2^n+\frac{1}{2}}{2^n} < t \leq \frac{k-2^n+1}{2^n} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

reciben el nombre de funciones de Haar.

Lema 1.2. Las funciones $\{h_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ constituyen una base ortonormal de $L^2(0, 1)$

Demostración. Para ver que $\{h_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ es una base ortonormal de $L^2(0, 1)$ tenemos que ver

i) $\int_0^1 h_k^2 dt = 1$

ii) $\int_0^1 h_i h_j dt = 0$ para $i \neq j$

Comenzamos probando i). Se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^1 h_k^2 dt &= \int_{\frac{k-2^n}{2^n}}^{\frac{k-2^n+\frac{1}{2}}{2^n}} \left(2^{\frac{n}{2}}\right)^2 dt + \int_{\frac{k-2^n+\frac{1}{2}}{2^n}}^{\frac{k-2^n+1}{2^n}} \left(-2^{\frac{n}{2}}\right)^2 dt \\ &= 2^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) = 2^n \left(\frac{2}{2^{n+1}} \right) = 1. \end{aligned}$$

Veamos ii). Observamos que para $i > j$, o bien $h_i h_j = 0$ o bien se tiene que $h_j = \pm 2^{\frac{n}{2}}$, luego

$$\int_0^1 h_i h_j dt = c \int_0^1 h_i dt = 0 \text{ con } c \text{ constante,}$$

puesto que la función h_j es constante en el soporte de la función h_i . Con lo cual queda probado que las funciones de Haar constituyen una base ortonormal de $L^2(0, 1)$. \square

Tenemos que una función f definida en $[0, 1]$, puede expresarse en desarrollo de series con funciones de Haar. Esto es debido a que variando n podemos “manejar” la altura y “dilatarse” la función con el valor $2^{\frac{n}{2}}$. Además el valor k permite desplazar la función del origen. Con lo cual, mediante combinaciones lineales de funciones de Haar, variando los valores de n y k podemos desarrollar cualquier función $f \in L^2(0, 1)$.

Vista Definición 1.4 y Lema 1.2 estamos dispuestos a definir las funciones de Schauder.

Definición 1.5. Sea $k \geq 1$ se define como la función k -ésima de Schauder

$$s_k(t) := \int_0^t h_k(s) ds \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Podemos pensar en la representación de las funciones k -ésimas de Schauder como una “tienda de campaña” de altura $2^{-\frac{n}{2}-1}$ donde la base de la “tienda” se encuentra sobre el intervalo $[\frac{k-2^n}{2^n}, \frac{k-2^n+1}{2^n}]$ y $2^n \leq k < 2^{n+1}$. En consecuencia, el mayor valor que puede tomar este tipo de funciones para $0 \leq t \leq 1$ es $2^{-\frac{n}{2}-1}$.

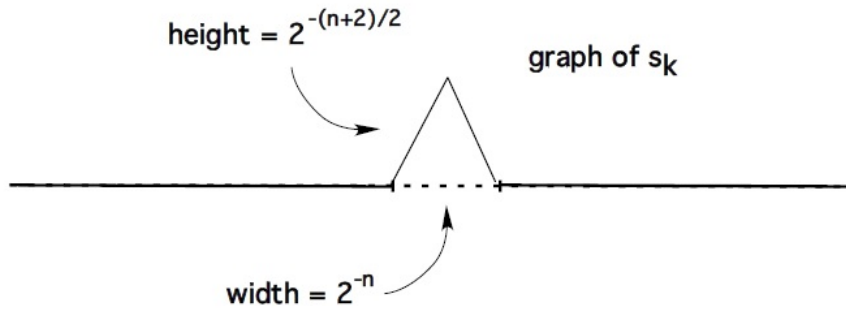


Figura 1.1: Grafo de la función de Schauder [12]

Llegados a este punto, queremos definimos $W(t)$ como

$$W(t) := \sum_{k=0}^{\infty} A_k s_k(t) \quad (1.2)$$

para $0 \leq t \leq 1$, donde los coeficientes A_k son v.a.'s independientes, con distribución $N(0, 1)$ definidas en un espacio probabilístico.

Observamos ahora que las funciones de Schauder verifican

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k(t) s_k(s) = \min\{t, s\} \quad (1.3)$$

con $0 \leq s, t \leq 1$. Para ellos definimos la siguiente función

$$\phi_s(r) := \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq r \leq s \\ 0 & \text{para } s < r \leq 1 \end{cases}$$

Entonces suponiendo que $s \leq t$ podemos escribir s como

$$s = \int_0^1 \phi_{t(r)} \phi_{s(r)} dr = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k,$$

donde $a_k = \int_0^1 \phi_{t(r)} h_{k(r)} dr = \int_0^t h_{k(r)} dr = s_k(t)$ y $b_k = \int_0^1 \phi_{s(r)} h_{k(r)} dr = s_k(s)$.

Ahora bien, necesitamos ver que la serie propuesta para el movimiento browniano converge. Para ello necesitamos demostrar dos lemas: el primero permitirá estudiar cómo converge una serie desarrollada con funciones k -ésimas de Schauder, mientras que el segundo nos servirá para conocer el valor que toman las variables aleatorias A_k en módulo. Con lo cual, con estos dos lemas podremos probar que la serie propuesta (1.1) converge.

Lema 1.3. Sea $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ una secuencia de números reales tales que $|a_k| = O(k^{\delta})$ para algún $0 \leq \delta < \frac{1}{2}$. Entonces la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k s_k(t)$$

converge uniformemente para $0 \leq t \leq 1$.

Demostración. Fijamos $\epsilon > 0$. Para analizar la convergencia en el instante t con $0 \leq t \leq 1$ tomamos k tal que $2^n \leq k < 2^{n+1}$. Entonces

$$b_n := \max_{2^n \leq k < 2^{n+1}} |a_k| \leq c(2^{n+1})^{\delta}$$

para una cierta constante c positiva. Entonces para $0 \leq t \leq 1$,

$$\sum_{k=2^m}^{\infty} |a_k| |s_k(t)| \leq \sum_{n=m}^{\infty} b_n \max_{2^n \leq k < 2^{n+1}} |s_k(t)| \leq c \sum_{n=m}^{\infty} (2^{n+1})^{\delta} 2^{-\frac{n}{2}-1} < \epsilon$$

con m suficiente grande, puesto que $0 \leq \delta < \frac{1}{2}$. □

Lema 1.4. Sean $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ v.a.'s independientes que siguen una distribución $N(0, 1)$. Se tiene que para casi todo punto muestral ω ,

$$|A_k(\omega)| = O(\sqrt{\log k})$$

para $k \rightarrow \infty$.

Es decir, el orden del módulo de la v.a. es del tamaño de logaritmo de k a medida que este crece.

Demostración. Para todo $x > 0$ y $k = 2, 3 \dots$ sabemos que A_k sigue una distribución $N(0, 1)$, por tanto

$$\mathbf{P}(|A_k| > x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{-\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds.$$

Dado que la distribución normal es simétrica tendremos que $\int_{-x}^{-\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \int_x^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$. Por tanto,

$$\mathbf{P}(|A_k| > x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4}} ds \leq c e^{-\frac{x^2}{4}}$$

para cierta constante positiva c .

Tomando $x := 4\sqrt{\log k}$ se tiene

$$\mathbf{P}(|A_k| \geq 4\sqrt{\log k}) \leq ce^{-4\log k} = c\frac{1}{k^4}.$$

Dado que la serie $\sum \frac{1}{k^4} < \infty$, por el Lema de Borel-Cantelli se tiene

$$\mathbf{P}(|A_k| \geq 4\sqrt{\log k} \text{ i.o.}) = 0.$$

Así, debe ser en casi todo punto ω

$$|A_k(\omega)| \leq 4\sqrt{\log k},$$

siempre que $k \geq K$, donde K depende de ω . □

Una vez conocidos estos lemas, estamos en disposición de demostrar el Teorema de existencia del movimiento browniano. Dicho Teorema nos dará un desarrollo formal del movimiento browniano utilizando como bases las funciones k -ésimas de Schauder.

Teorema 1.1 (Teorema de existencia del movimiento browniano). *Sea $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ una familia de v.a.'s independientes que siguen una distribución $N(0,1)$ definidas en el mismo espacio probabilístico. Entonces*

$$W(t) := \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\omega)s_k(t) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

converge uniformemente en t , para casi todo punto ω . Además, se tiene que

i) $W(t, \omega)$ es un movimiento browniano.

ii) Para casi todo punto ω el camino muestral $t \mapsto W(t, \omega)$ es continuo.

Demostración. Por el Lema 1.3 la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k s_k(t)$ converge con $|a_k| = O(k^\delta)$ donde $0 \leq \delta < 1$ y por el Lema 1.4 $|A_k| = O(\sqrt{\log k})$, entonces es claro que la serie $W(t) := \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\omega)s_k(t)$ converge uniformemente.

Probemos ii). Queremos ver ahora que la aplicación $t \mapsto W(t, \omega)$ es continua. Para ello utilizamos la definición de continuidad. Tomamos tiempos s, t tales que $t \geq s \geq 0$. Tomamos $\delta > 0$ de modo que $|t - s| < \delta$.

Entonces,

$$\begin{aligned} |W(t, \omega) - W(s, \omega)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\omega)s_k(t) - \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\omega)s_k(s) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\omega)s_k(t) \right| + \left| \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\omega)s_k(s) \right|. \end{aligned}$$

Hemos visto que estas series convergen uniformemente en $t, s \in [0, 1]$, con lo cual para todo $\epsilon^* > 0$

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\omega)s_k(t) \right| + \left| \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\omega)s_k(s) \right| < \epsilon^* + \epsilon^* = 2\epsilon^*.$$

Así, tomando $\epsilon = 2\epsilon^*$ se tiene que

$$|W(t, \omega) - W(s, \omega)| < \epsilon.$$

Tan solo nos queda probar que $W(t)$ es un movimiento browniano. Notamos que $W(0) = 0$ dado que $s_k(0) = 0 \forall k$. Veamos que $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$ para $0 \leq s \leq t \leq 1$. Para ello calculamos

$$\mathbb{E} \left(e^{i\lambda(W(t)-W(s))} \right) = \mathbb{E} \left(e^{i\lambda \sum_{k=0}^{\infty} A_k(s_k(t)-s_k(s))} \right),$$

por independencia de las v.a.'s llegamos a que

$$\mathbb{E} \left(e^{i\lambda \sum_{k=0}^{\infty} A_k(s_k(t)-s_k(s))} \right) = \prod_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(e^{i\lambda A_k(s_k(t)-s_k(s))} \right),$$

y como A_k sigue una distribución $N(0, 1)$,

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(e^{i\lambda A_k(s_k(t)-s_k(s))} \right) &= \prod_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2} (s_k(t)-s_k(s))^2} \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (s_k(t)-s_k(s))^2} \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} s_k^2(t) - 2s_k(t)s_k(s) + s_k^2(s)}. \end{aligned}$$

Ahora utilizando la propiedad (1.3) de las funciones de Schauder tenemos que

$$e^{-\frac{\lambda^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (s_k^2(t) - 2s_k(t)s_k(s) + s_k^2(s))} = e^{-\frac{\lambda^2}{2} (t - 2s + s)} = e^{-\frac{\lambda^2}{2} (t-s)}.$$

Y debido a la unicidad de las funciones características, $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$. Para finalizar la demostración tan sólo es necesario probar que, para cualquier entero positivo m y para todo $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq 1$

$$\mathbb{E} \left(e^{i \sum_{j=1}^m \lambda_j (W(t_j) - W(t_{j-1}))} \right) = \prod_{j=1}^m e^{-\frac{\lambda_j^2}{2} (t_j - t_{j-1})}.$$

Para el caso $m = 2$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(e^{i[\lambda_1 W(t_1) + \lambda_2 (W(t_2) - W(t_1))]} \right) &= \mathbb{E} \left(e^{i[(\lambda_1 - \lambda_2)W(t_1) + \lambda_2 W(t_2)]} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(e^{i(\lambda_1 - \lambda_2) \sum_{k=0}^{\infty} A_k s_k(t_1) + i\lambda_2 \sum_{k=0}^{\infty} A_k s_k(t_2)} \right) \\ &= \prod_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(e^{iA_k [(\lambda_1 - \lambda_2)s_k(t_1) + \lambda_2 s_k(t_2)]} \right) \\ &= \prod_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} ((\lambda_1 - \lambda_2)s_k(t_1) + \lambda_2 s_k(t_2))^2} \\ &= e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} ((\lambda_1 - \lambda_2)^2 s_k^2(t_1) + 2(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2 s_k(t_1)s_k(t_2) + \lambda_2^2 s_k^2(t_2))} \\ &= e^{-\frac{1}{2} [(\lambda_1 - \lambda_2)^2 t_1 + 2(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2 t_1 + \lambda_2^2 t_2]} \\ &= e^{-\frac{1}{2} [\lambda_1^2 t_1 + \lambda_2^2 (t_2 - t_1)]}. \end{aligned}$$

Observamos que el proceso de demostración es análogo al realizado para demostrar que $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$. Con el mismo razonamiento, para $m \geq 3$

$$E \left(e^{i \sum_{j=1}^m \lambda_j (W(t_j) - W(t_{j-1}))} \right) = \prod_{j=1}^m e^{-\frac{1}{2} \lambda_j^2 (t_j - t_{j-1})}.$$

Ahora por la unicidad de las funciones características,

$$F_{W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1})}(x_1, \dots, x_m) = F_{W(t_1)}(x_1) \dots F_{W(t_m) - W(t_{m-1})}(x_m)$$

para todo $x_i \in \mathbb{R}$ con $i = 1, 2, \dots, m$. En consecuencia, $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), W(t_m) - W(t_{m-1})$ son independientes, y así queda demostrado que

$$W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\omega) s_k(t) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

es un movimiento browniano. \square

Con lo cual, podemos afirmar que si nos encontramos en un espacio probabilístico con v.a.'s definidas como en el Teorema de existencia podemos construir un movimiento browniano usando una base de $L^2(0, 1)$ con funciones antiderivadas.

En este trabajo trabajaremos solamente con movimientos brownianos y procesos estocásticos unidimensionales, no obstante los resultados que veamos pueden ser extendidos a n -dimensiones.

1.3. Propiedades del movimiento browniano

En esta sección, vamos a estudiar la continuidad de los caminos muestrales $t \mapsto W(t, \omega)$. Vamos a ver que, en efecto, los caminos muestrales son Hölder-continuos para exponente $\gamma < \frac{1}{2}$, pero sin embargo no lo son para $\frac{1}{2} \leq \delta \leq 1$, lo que implica una no diferenciabilidad en ningún punto de los caminos muestrales. Este hecho nos pondrá un problema en el estudio de las ecuaciones diferenciales estocásticas.

Definición 1.6. Una función $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ decimos que es Hölder-continua con exponente γ si existe una constante positiva k tal que:

$$|f(t) - f(s)| \leq k |t - s|^\gamma \quad \text{para todo } t, s \in [0, T].$$

A continuación enunciamos el Teorema de Kolmogorov. Dicho teorema nos servirá para deducir para qué valores de γ los caminos muestrales son Hölder-continuos.

Teorema 1.2 (Kolmogorov). Sea $X(t)$ un proceso estocástico con caminos muestrales continuos casi seguro tales que verifican:

$$E(|X(t) - X(s)|^\beta) \leq c |t - s|^{1+\alpha}$$

para constantes $\alpha, \beta \geq 0$ y una constante positiva $c \geq 0$.

Entonces para cada $0 \leq \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$, $T > 0$ y casi todo punto ω , existe una constante $k = k(\gamma, \omega, T)$ tal que

$$|X(t) - X(s)| \leq k |t - s|^\gamma$$

para todo tiempo $0 \leq s, t \leq T$.

Demostración. Tomamos $0 < \gamma < \frac{1}{2}$. Para facilitar la demostración, tomamos $T = 1$ y definimos $A_n := \{ |X(\frac{i+1}{2^n}) - X(\frac{i}{2^n})| > \frac{1}{2^{n\gamma}} \text{ para algún entero } 0 \leq i < 2^n - 1 \}$

De modo que

$$\mathbf{P}(A_n) \leq \sum_{i=0}^{2^n-1} \mathbf{P} \left(\left| X \left(\frac{i+1}{2^n} \right) - X \left(\frac{i}{2^n} \right) \right| > \frac{1}{2^{n\gamma}} \right)$$

Recordemos que la desigualdad de Chebyshev [A.3](#) mantiene que siendo X una v.a., $1 \leq p < \infty$ y $\lambda > 0$

$$\mathbf{P}(|X| > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} \mathbf{E}(|X|^p)$$

Por la desigualdad de Chebyshev

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_n) &\leq \sum_{i=0}^{2^n-1} \mathbf{E} \left(\left| X \left(\frac{i+1}{2^n} \right) - X \left(\frac{i}{2^n} \right) \right|^\beta \right) \left(\frac{1}{2^{n\gamma}} \right)^{-\beta} \\ &\leq c \sum_{i=0}^{2^n-1} \left(\frac{1}{2^n} \right)^{1+\alpha} \left(\frac{1}{2^{n\gamma}} \right)^{-\beta} \\ &\leq c \frac{2^{n-1}}{2^{n(1+\alpha-\beta\gamma)}} \\ &\leq c \frac{2^{n(\beta\gamma-\alpha)}}{2} \leq c 2^{n(\beta\gamma-\alpha)} \end{aligned}$$

Puesto que $-\alpha + \gamma\beta < 0$ se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < \infty$, entonces en virtud del lema de Borel-Cantelli tenemos que $\mathbf{P}(A_n \text{ i.o.}) = 0$.

Por tanto, debe existir para casi todo punto ω un $m = m(\omega)$ tal que

$$\left| X \left(\frac{i+1}{2^n}, \omega \right) - X \left(\frac{i}{2^n}, \omega \right) \right| \leq \frac{1}{2^{n\gamma}} \text{ para } 0 \leq i \leq 2^n - 1, \text{ con } n \geq m.$$

Tomamos $\omega \in \Omega$, sea $n \geq 1$ y $t_1, t_2 \in [0, 1]$ racionales diádicos, es decir, números racionales de la forma $\frac{a}{2^b}$ con $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{N}$. Con ello,

$$\frac{1}{2^n} \leq t \leq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ para } t = t_2 - t_1$$

Con lo cual podemos expresar $t_1 = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{p_1}} - \dots - \frac{1}{2^{p_s}}$ con $n < \dots < p_s$. Del mismo modo, $t_2 = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{q_1}} - \dots - \frac{1}{2^{q_l}}$ con $n < \dots < q_l$.

En este caso, $t_1 \leq \frac{i}{2^n} \leq \frac{j}{2^n} \leq t_2$ por lo que $\frac{j-i}{2^n} \leq t < \frac{1}{2^{n-1}}$. Si se da el caso que $j = i$ ó $j = i + 1$,

$$\left| X \left(\frac{j}{2^n}, \omega \right) - X \left(\frac{i}{2^n}, \omega \right) \right| \leq k t^\gamma \quad (1.4)$$

Para $r = 1, \dots, s$ se verifica que

$$\left| X(t_1, \omega) - X \left(\frac{i}{2^n}, \omega \right) \right| \leq k \sum_{r=1}^s \left| \frac{1}{2^{p_r}} \right|^\gamma$$

puesto que $p_r > n$

$$k \sum_{r=1}^s \left| \frac{1}{2^{pr}} \right|^\gamma \leq \frac{k}{2^{n\gamma}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^{r\gamma}} = \frac{c}{2^{n\gamma}} \leq ct^\gamma \quad (1.5)$$

debido a como está definido t . Del mismo modo se obtiene que

$$\left| X(t_2, \omega) - X\left(\frac{j}{2^n}, \omega\right) \right| \leq ct^\gamma. \quad (1.6)$$

Así,

$$\begin{aligned} |X(t_1, \omega) - X(t_2, \omega)| &\leq \left| X(t_1, \omega) - X\left(\frac{i}{2^n}, \omega\right) \right| + \left| X\left(\frac{i}{2^n}, \omega\right) - X\left(\frac{j}{2^n}, \omega\right) \right| \\ &\quad + \left| X(t_2, \omega) - X\left(\frac{j}{2^n}, \omega\right) \right|. \end{aligned}$$

Sea

$$f(t_1, t_2, i, j, \omega, n) = |X(t_1, \omega) - X\left(\frac{i}{2^n}, \omega\right)| + \left| X\left(\frac{i}{2^n}, \omega\right) - X\left(\frac{j}{2^n}, \omega\right) \right| + |X(t_2, \omega) - X\left(\frac{j}{2^n}, \omega\right)|,$$

utilizando las estimaciones (1.4), (1.5) y (1.6)

$$f(t_1, t_2, i, j, \omega, n) \leq \frac{c}{2^{n\gamma}} + k \frac{|i-j|}{2^n} + \frac{c}{2^{n\gamma}}.$$

Dado que $\frac{1}{2^n} < t$, se tiene que $\frac{1}{2^{n\gamma}} \leq t^\gamma$ y puesto que $t := t_2 - t_1 = |t_2 - t_1|$ ya que $t_2 > t_1$ llegamos finalmente a que

$$|X(t_1, \omega) - X(t_2, \omega)| \leq \hat{c} |t_1 - t_2|^\gamma$$

con $\hat{c} = \hat{c}(\omega)$.

Dado que tenemos que $t \mapsto X(t, \omega)$ es continuo para casi todo punto ya que satisface las condiciones de continuidad de Hölder, la desigualdad a la que se ha llegado se verifica para todo $t_1, t_2 \in [0, 1]$. \square

Ahora bien, vamos a trasladar el Teorema de Kolmogorov al caso donde el proceso estocástico sea un movimiento browniano unidimensional.

Recordemos que la función de densidad de un movimiento browniano unidimensional con tiempo t es $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$. Por ello, claramente tenemos que

$$E(|W(t) - W(s)|^{2m}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}^n} x^{2m} e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx$$

Realizando el cambio de variable $y = \frac{x}{\sqrt{t-s}}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}^n} x^{2m} e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx &= \frac{1}{2\pi} |t-s|^m \int_{\mathbb{R}^n} y^{2m} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= c |t-s|^m. \end{aligned}$$

Observamos que la hipótesis del teorema de Kolmogorov se da para los valores de los parámetros $\beta = 2m$ y $\alpha = m - 1$ y deducimos que $W(t)$ es Hölder-continuo c.s para todo exponente γ que satisfaga

$$0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2m} \text{ para todo } m.$$

Afirmamos en virtud del teorema de Kolmogorov, para casi todo ω y algún $T > 0$ el camino muestral $t \mapsto W(t, \omega)$ es Hölder-continuo para exponente $0 < \gamma < \frac{1}{2}$.

Seguidamente, vamos a ver una de las propiedades más características del movimiento browniano, que es su no diferenciabilidad. Esto es debido a que el movimiento browniano en ningún punto es Hölder-continuo con exponente $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$. Debido a esta propiedad del movimiento browniano, surge un problema si queremos integrar con respecto a dW a la hora de resolver una ecuación diferencial. No tiene sentido utilizar la integración ordinaria, puesto que el movimiento browniano no es diferenciable. Por ello, necesitaremos desarrollar una teoría para resolver aquellas integrales donde esté presente la diferencial del browniano. Esta integración estocástica se estudiará en el siguiente capítulo.

Ahora, vamos a enunciar el teorema de la no diferenciabilidad del movimiento browniano y dar su demostración.

Teorema 1.3 (Paley, Wiener y Zygmund). *Los caminos muestrales del movimiento browniano son no diferenciables c.s. Además para todo t se tiene que*

$$D_-W(t) = +\infty \text{ ó } D_+W(t) = +\infty$$

donde D_- y D_+ representan la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha respectivamente.

Demostración. Fijamos $t_0 \in [0, 1]$ tal que $-\infty < D_-W(t_0) \leq D_+W(t_0) < +\infty$. Entonces

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{|W(t_0 + h) - W(t_0)|}{h} < +\infty.$$

Con lo cual existe $c > 0$ de modo que

$$\sup \frac{|W(t_0 + h) - W(t_0)|}{h} < c.$$

Basta ver que este suceso es de probabilidad 0 para cualquier c . Fijamos $c > 0$ y $t_0 \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$ para $n > 2$. Con lo cual, para $1 \leq j \leq 2^n - k$ en virtud de la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} |W(\frac{k+j}{2^n}) - W(\frac{k+j-1}{2^n})| &\leq |W(\frac{k+j}{2^n}) - W(t_0)| + |W(t_0) - W(\frac{k+j-1}{2^n})| \\ &\leq \frac{c(2j+1)}{2^n}. \end{aligned}$$

Sea $A_{n,k} := \left\{ |W(\frac{k+j}{2^n}) - W(\frac{k+j-1}{2^n})| \leq \frac{c(2j+1)}{2^n} \text{ para } j = 1, 2, 3, \dots \right\}$.

Como el movimiento browniano tiene la propiedad de escalamiento, i.e.,

$$\begin{aligned} W(\alpha t) &\sim N(0, \alpha t) \\ &\sim \sqrt{\alpha} N(0, t) \\ &\sim \sqrt{\alpha} W(t), \end{aligned}$$

o equivalentemente $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}W(\alpha t) \sim W(t)$, y debido a la independencia de los incrementos tenemos que para $1 \leq k \leq 2^n - 3$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{n,k}) &\leq \prod_{j=1}^3 \mathbf{P}\left(|W(\frac{k+j}{2^n}) - W(\frac{k+j-1}{2^n})| \leq \frac{c(2j+1)}{2^n}\right) \\ &\leq \mathbf{P}\left(|W(1)| \leq \frac{7c}{\sqrt{2^n}}\right)^3. \end{aligned}$$

Dado que $W(1) \sim N(0, 1)$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{2^n-3} A_{n,k}\right) \leq 2^n (7c2^{-\frac{n}{2}})^3 = (7c)^3 2^{-\frac{n}{2}}.$$

Por tanto por el lema de Borel-Cantelli se tiene que $\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{2^n-3} A_{n,k} \text{ i.o.}\right) = 0$. \square

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales estocásticas

En este capítulo introducimos las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs). Veremos algunos ejemplos de ellas y las resolveremos, estudiaremos la existencia y unicidad de solución así como la dependencia continua del dato inicial que existe en las EDEs.

Sin embargo, como hemos mencionado en el capítulo anterior, necesitaremos unas herramientas previas para poder resolver EDEs. Estas herramientas serán la integración estocástica y la fórmula de Itô, que abarcaran las secciones [2.1](#) y [2.2](#). Con la integración estocástica podremos comprender y dar una definición a integrales del tipo $\int_0^T G dW$ donde G es un proceso estocástico. Comenzaremos viendo el caso particular en el que $G = W$, y luego intentaremos construir una definición que nos permita conocer el valor de $\int_0^T G dW$ para un amplio rango de procesos estocásticos. Esto es necesario, ya que para resolver EDEs nos aparecerán integrales de este tipo, mientras que la fórmula de Itô es una herramienta útil para resolver EDEs sencillas.

2.1. Integración estocástica

El cálculo estocástico creció debido a la necesidad de dar sentido a aquellas ecuaciones diferenciales en las que estaban involucrados procesos estocásticos continuos.

El proceso estocástico más destacado es sin duda el movimiento browniano, el cual no es diferenciable en ningún punto como ya hemos visto. Nosotros queremos estudiar la integración estocástica para ser capaces de comprender las ecuaciones diferenciales estocásticas.

$$\begin{cases} dX = b(X, t)dt + B(X, t)dW \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Es obvio que la solución de la EDE debe verificar que

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(X, s)ds + \int_0^t B(X, s)dW.$$

Sin embargo, tenemos que estudiar previamente el término

$$\int_0^T B(X, s)dW.$$

Obviamente no se puede entender $\int_0^T B(X, s)dW$ como una integral ordinaria. Comenzaremos tratando el caso $G = W$, dando un procedimiento para conocer $\int_0^T WdW$. El procedimiento para aproximar dicha integral es utilizar series de Riemann y a partir de ellas construir una aproximación.

Definición 2.1. Sea P_m una partición del intervalo $[0, T]$ con $P_m = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T\}$.

Denotamos $|P_m| = \max_{0 \leq k \leq m-1} |t_{k+1} - t_k|$ y para λ con $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$\tau_k := (1 - \lambda)t_k + \lambda t_{k+1} \text{ para } k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Con lo cual se define la correspondiente aproximación por series de Riemann de $\int_0^T WdW$ donde W es un movimiento browniano unidimensional como

$$R(P_m, \lambda) := \sum_{k=0}^{m-1} W(\tau_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k)). \quad (2.1)$$

En el siguiente vamos a dar lema una propiedad de la aproximación por series de Riemann. Esta propiedad nos servirá para ver la convergencia de dicha serie, así llegaremos a la definición de integral estocástica que dio Itô y observaremos cuales son sus ventajas respecto a otras definiciones existentes en la integración estocástica como por ejemplo la integral de Stratonovich.

Lema 2.1. Sea P_n una partición del intervalo $[0, T]$ y $0 \leq \lambda \leq 1$ es fijo. Sea $R_n = R(P_n, \lambda)$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{W^2(T)}{2} + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) T.$$

Esto es,

$$E \left(\left(R_n - \frac{W(T)^2}{2} - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) T \right)^2 \right) \rightarrow 0.$$

En particular, el límite de la aproximación de la serie de Riemann depende de la elección de los puntos intermedios $t_{n_k} \leq \tau_{n_k} \leq t_{n_{k+1}}$, donde $\tau_{n_k} = (1 - \lambda)t_{n_k} + \lambda t_{n_{k+1}}$.

Demostración. Expresamos R_n del siguiente modo

$$R_n = \sum_{k=0}^{m-1} W(t_{n_k}) (W(t_{n_{k+1}}) - W(t_{n_k})) + \sum_{k=0}^{m-1} (W(\tau_{n_k}) - W(t_{n_k})) (W(t_{n_{k+1}}) - W(t_{n_k})).$$

Analicemos el primer sumando de R_n . Denotamos $\Delta W_{t,s} = W(t) - W(s)$. Como

$$W(t_{n_k}) \Delta W_{t_{n_{k+1}}, t_{n_k}} = \frac{1}{2} (W^2(t_{n_{k+1}}) - W^2(t_{n_k})) - \frac{1}{2} \Delta W_{t_{n_{k+1}}, t_{n_k}}^2,$$

se tiene que

$$\sum_{k=0}^{m-1} W(t_{n_k}) \Delta W_{t_{n_{k+1}}, t_{n_k}} = \frac{1}{2} W^2(T) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \Delta W_{t_{n_{k+1}}, t_{n_k}}^2.$$

Entonces, por el lema de variación cuadrática [A.2](#),

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \Delta W_{t_{n_{k+1}}, t_{n_k}}^2 \rightarrow \frac{T}{2}.$$

Ahora, veamos qué sucede con el segundo sumando de R_n . Podemos reescribirlo sumando como

$$\sum_{k=0}^{m-1} \Delta W_{\tau_{n_k}, t_{n_k}} \Delta W_{t_{n_{k+1}}, t_{n_k}} = \sum_{k=0}^{m-1} \Delta W_{\tau_{n_k}, t_{n_k}}^2 + \sum_{k=0}^{m-1} \Delta W_{\tau_{n_k}, t_{n_k}} \Delta W_{t_{n_{k+1}}, \tau_{n_k}}. \quad (2.2)$$

Tomando esperanzas en el primer sumando de [\(2.2\)](#),

$$\mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \Delta W_{\tau_{n_k}, t_{n_k}}^2 \right) = \sum_{k=0}^{m-1} (\tau_{n_k} - t_{n_k}),$$

y desarrollando llegamos a que

$$\sum_{k=0}^{m-1} (\tau_{n_k} - t_{n_k}) = \sum_{k=0}^{m-1} ((1 - \lambda)t_{n_k} + \lambda t_{n_{k+1}} - t_{n_k}) = \lambda \sum_{k=0}^{m-1} (t_{n_{k+1}} - t_{n_k}) \rightarrow \lambda T.$$

Por último, falta ver cómo se comporta el segundo sumando de [\(2.2\)](#). Como los incrementos del movimiento browniano son independientes, la esperanza del producto es el producto de las esperanzas y por tanto

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{E} \left(\Delta W_{t_{n_{k+1}}, \tau_{n_k}}^2 \right) \mathbb{E} \left(\Delta W_{\tau_{n_k}, t_{n_k}}^2 \right) &= \sum_{k=0}^{m-1} (1 - \lambda)(t_{n_{k+1}} - t_{n_k}) \lambda(t_{n_{k+1}} - t_{n_k}) \\ &\leq \lambda(1 - \lambda)T|\mathbb{P}_n| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, combinando los tres sumandos tenemos que

$$R_n \rightarrow \frac{W^2(T)}{2} + \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) T.$$

□

Observamos que la construcción de la integral estocástica es similar a la construcción de la integral de Riemann. La aparición explícita de λ (relacionado con el punto donde se mide la altura del rectángulo) es debido la “falta de regularidad” que existe en dicha integral, como consecuencia de la diferencial del browniano.

Con lo cual, la definición de integral estocástica de Itô es el caso particular en el que $\lambda = 0$ y así,

$$\int_0^T W dW = \frac{W^2(T)}{2} - \frac{T}{2}. \quad (2.3)$$

Existen otras definiciones para diferentes valores de λ como la mencionada integral de Stratonovich, es el caso en el que $\lambda = \frac{1}{2}$ y se denota como

$$\int_0^T W \circ dW = \frac{W^2(T)}{2}. \quad (2.4)$$

La notación \circ indica que se está integrando bajo la definición de Stratonovich. Esta definición no será tratada en este trabajo.

La mayor ventaja que nos proporciona la definición de Itô es que a la hora de evaluar en los puntos τ_k , tenemos que $\tau_k = t_k$, mientras que para el caso de Stratonovich es más complejo. El uso de una definición u otra se debe a las condiciones en las que estemos trabajando. La definición (2.4) se utiliza en condiciones muy particulares, y en los casos que trataremos es más ventajoso utilizar la definición de Itô. Esto no quiere decir que en otras ocasiones la definición (2.4) no tenga ventaja sobre (2.3). Por ejemplo, en la fórmula de Itô, que veremos en la siguiente sección, en su respectiva fórmula de Stratonovich no aparecen términos de segundo orden, con lo que se obtiene una pequeña ventaja computacional.

La definición de Itô nos permitirá resolver $\int_0^T G dW$ para un tipo de procesos estocásticos G llamados no anticipados. Antes de continuar con la definición de proceso estocástico no anticipado necesitamos conocer algunos conceptos que intervienen en su definición.

Definición 2.2. Sea $W(t)$ un movimiento browniano definido en un espacio probabilístico (Ω, \mathcal{U}, P) .

- Llamamos historia del movimiento browniano hasta el tiempo t a la σ -álgebra $\mathcal{W} := \mathcal{U}(W(s) : 0 \leq s \leq t)$.
- Llamamos futuro del movimiento browniano más allá del tiempo t a la σ -álgebra $\mathcal{W}^+ := \mathcal{U}(W(s) - W(t) : s \geq t)$.

Definición 2.3. Una familia $\mathcal{F}(t)$ de σ -álgebras $\subseteq \mathcal{U}$ se llama filtración (con respecto a $W(t)$) si satisface que

- i) $\mathcal{F}(s) \subseteq \mathcal{F}(t)$ para todo $0 \leq s \leq t$.
- ii) $\mathcal{W}(t) \subseteq \mathcal{F}(t)$ para $t \geq 0$.
- iii) $\mathcal{F}(t)$ es independiente $\mathcal{W}^+(t)$ para todo $t \geq 0$.

Podemos pensar en la filtración $\mathcal{F}(t)$, como la σ -álgebra que contiene toda la información suficiente del movimiento browniano hasta el tiempo t .

Una vez conocidas estas nociones, estamos en disposición de definir matemáticamente proceso no anticipado.

Definición 2.4. Un proceso estocástico $G(t)$ que toma valores reales recibe el nombre de proceso no anticipado (con respecto a $\mathcal{F}(t)$) si para cada $t \geq 0$, $G(t)$ es $\mathcal{F}(t)$ -medible.

Observación 2.1. Recordemos que, dado un espacio probabilístico (Ω, \mathcal{U}, P) , si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que para cada $B \in \mathcal{B}(\sigma\text{-álgebra de Borel})$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{U}$ entonces X es v.a., que es equivalente a decir que X es \mathcal{U} -medible.

Es decir, para cada instante $t \geq 0$ la variable aleatoria $G(t)$ depende sólo de la información existente en la filtración $\mathcal{F}(t)$. A continuación, introduciremos la definición y las propiedades de integral estocástica para procesos de escalera. Esta definición es importante y necesaria dado que interviene en la definición de integral de Itô.

Destacar que ahora trabajaremos con un tipo particular de procesos estocásticos, los procesos estocásticos progresivamente medibles. Estos procesos son aquellos que son medibles en la variable t y en la variable ω . Previamente, definimos el espacio en el que vamos a trabajar.

Definición 2.5. Definimos como $\mathbb{L}^2(0, T)$ el espacio de procesos estocásticos progresivamente medibles $G(t)$ tales que

$$E \left(\int_0^T G^2 dt \right) < +\infty.$$

Del mismo modo denotamos $\mathbb{L}^1(0, T)$ el espacio de procesos progresivamente medibles $F(t)$ tales que

$$E \left(\int_0^T |F| dt \right) < +\infty.$$

Dentro de los procesos estocásticos progresivamente medibles, utilizaremos los procesos de escalera (“step process”). Este tipo de procesos estocásticos son importantes, ya que la definición de integral de Itô se basa en utilizar una aproximación por procesos de escalera para definir $\int_0^T G dW$ donde G es un proceso estocástico progresivamente medible.

Definición 2.6. Sea $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$. G es un proceso de escalera si existe una partición $P_m := \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T\}$ tal que

$$G(t) \equiv G_k \text{ para } t_k \leq t < t_{k+1} \text{ con } k = 0, \dots, m-1.$$

Es decir, dada una partición del intervalo, los procesos de escalera son aquellos que se pueden ir aproximando “por secciones”.

Ahora bien, conocido este concepto podemos dar la definición de integral estocástica de Itô para procesos de escalera así como sus propiedades más destacadas.

Definición 2.7. Sea $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$ un proceso de escalera con $P_m := \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T\}$. Entonces la integral estocástica de Itô del proceso G se define como

$$\int_0^T G dW = \sum_{k=0}^{m-1} G_k (W(t_{k+1}) - W(t_k)). \quad (2.5)$$

Proposición 2.1 (Propiedades de la integral para procesos de escalera). Sean G, H procesos de escalera en $\mathbb{L}^2(0, T)$ y $a, b \in \mathbb{R}$ constantes. Se tiene que

$$i) \int_0^T (aG + bH) dW = a \int_0^T G dW + b \int_0^T H dW.$$

$$ii) E \left(\int_0^T G dW \right) = 0.$$

$$iii) E \left(\left(\int_0^T G dW \right)^2 \right) = E \left(\int_0^T G^2 dt \right).$$

Demostración. Para demostrar i), basta utilizar la definición de proceso de escalera.

$$\int_0^T (aG + bH)dW = \sum_{k=0}^{m-1} (aG_k + bH_k) (W(t_{k+1}) - W(t_k)).$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned} \int_0^T (aG + bH)dW &= \sum_{k=0}^{m-1} (aG_k + bH_k) (W(t_{k+1}) - W(t_k)) \\ &= a \sum_{k=0}^{m-1} (G_k) (W(t_{k+1}) - W(t_k)) + b \sum_{k=0}^{m-1} (H_k) (W(t_{k+1}) - W(t_k)) \\ &= a \int_0^T GdW + b \int_0^T HdW. \end{aligned}$$

Veamos ii). Definimos $\Delta W_{t,s} := W_t - W_s$. Como $G(t) \equiv G_k$ para $t_k \leq t < t_{k+1}$, tenemos que

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T GdW \right) = \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{E} (G_k \Delta W_{t_{k+1}, t_k}).$$

G_k es $\mathcal{F}(t_k)$ -medible y $\mathcal{F}(t_k)$ es independiente de $\mathcal{W}^+(t_k)$. Por otro lado, $\Delta W_{t_{k+1}, t_k}$ es $\mathcal{W}^+(t_k)$ -medible, y por tanto G_k es independiente de $\Delta W_{t_{k+1}, t_k}$. Así,

$$\mathbb{E} (G_k \Delta W_{t_{k+1}, t_k}) = \mathbb{E}(G_k) \mathbb{E}(\Delta W_{t_{k+1}, t_k}) = 0,$$

dado que $\mathbb{E}(\Delta W_{t_{k+1}, t_k}) = 0$.

Para ver iii), notar que

$$\mathbb{E} \left(\left(\int_0^T GdW \right)^2 \right) = \sum_{k,j=1}^{m-1} \mathbb{E} (G_k G_j \Delta W_{t_{k+1}, t_k} \Delta W_{t_{j+1}, t_j}).$$

Si $i < j$ entonces $\Delta W_{t_{k+1}, t_k}$ es independiente de $G_k G_j \Delta W_{t_{j+1}, t_j}$ y por tanto tenemos que

$$\mathbb{E} (G_k G_j \Delta W_{t_{k+1}, t_k} \Delta W_{t_{j+1}, t_j}) = \mathbb{E} (G_k G_j \Delta W_{t_{k+1}, t_k}) \mathbb{E} (\Delta W_{t_{j+1}, t_j}) = 0.$$

dado que $\mathbb{E}(\Delta W_{t_{j+1}, t_j}) = 0$.

Así, llegamos a que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left(\int_0^T GdW \right)^2 \right) &= \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{E}(G_k^2 \Delta W_{t_{k+1}, t_k}^2) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{E}(G_k^2) \mathbb{E}(\Delta W_{t_{k+1}, t_k}^2) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{E}(G_k^2) \mathbb{E}(\Delta W_{t_{k+1}, t_k}^2) \\ &= \mathbb{E} \left(\int_0^T G^2 dt \right) \end{aligned}$$

como queríamos probar, ya que $\mathbb{E}(\Delta W_{t_{k+1}, t_k}^2) = t_{k+1} - t_k$

□

Una vez conocidos los procesos de escalera, los utilizaremos para llegar a la definición de integral de Itô. Para llegar hasta dicha noción, vamos a ver que un proceso estocástico $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$ puede ser aproximado por procesos de escalera definidos en $\mathbb{L}^2(0, T)$, y una vez realizada la aproximación, pasar al límites para llegar a la integral de Itô de G . Comenzamos introduciendo el Lema de aproximación, cuya demostración puede verse en [15].

Lema 2.2 (Aproximación por procesos de escalera). *Sea $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$ un proceso estocástico, entonces existe una sucesión de procesos de escalera G_n acotados en $\mathbb{L}^2(0, T)$ tales que*

$$E \left(\int_0^T |G - G_n|^2 \right) \rightarrow 0.$$

La idea es, si $t \rightarrow G(t, \omega)$ es continua en casi todo punto ω , podemos definir

$$G_n(t) := G \left(\frac{k}{n} \right) \text{ para } \frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n} \text{ con } k = 0, \dots, nT.$$

Dado $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$ cualquiera, definimos

$$G_m(t) := \int_0^T m e^{m(s-t)} G(s) ds.$$

Como $E \left(\int_0^T G(s)^2 ds \right) < +\infty$, entonces $G_m \in \mathbb{L}^2(0, T)$ y con ello $t \rightarrow G_m(t, \omega)$ continua en casi todo punto ω . De este modo,

$$\int_0^T |G_m - G|^2 dt \rightarrow 0.$$

Con lo cual, visto que un proceso estocástico puede ser aproximado por procesos de escalera, podemos finalmente dar la definición y propiedades de la integral de Itô.

Definición 2.8. *Sea $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$ tal que G toma procesos de escalera G_n como en el lema precedente. Se llama integral de Itô de G a*

$$\int_0^T G dW = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T G_n dW. \quad (2.6)$$

Proposición 2.2 (Propiedades de la integral de Itô). *Sean $G, H \in \mathbb{L}^2(0, T)$ y sean a, b constantes en \mathbb{R} , se tiene que*

$$i) \int_0^T (aG + bH) dW = a \int_0^T G dW + b \int_0^T H dW.$$

$$ii) E \left(\int_0^T G dW \right) = 0.$$

$$iii) E \left(\left(\int_0^T G dW \right)^2 \right) = E \left(\int_0^T G^2 dt \right).$$

$$iv) E \left(\int_0^T G dW \int_0^T H dW \right) = E \left(\int_0^T GH dt \right).$$

Demostración. Para i) utilizando la definición de integral de Itô tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^T (aG + bH)dW &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (aG_n + bH_n)dW \\ &= a \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T G_n dW + \lim_{n \rightarrow \infty} b \int_0^T H_n dW \\ &= a \int_0^T G dW + b \int_0^T H dW.\end{aligned}$$

Veamos ahora ii), por definición de proceso de escalera

$$E \left(\int_0^T G dW \right) = E \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T G_n dW \right).$$

Por el Teorema de la Convergencia Dominada podemos sacar el límite fuera de la esperanza. Utilizando que $E \left(\int_0^T G_n dW \right) = 0$ por ser G_n un proceso de escalera llegamos a que

$$E \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T G_n dW \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\int_0^T G_n dW \right) = 0.$$

Para ver iii), notar que

$$E \left(\left(\int_0^T G dW \right)^2 \right) = E \left(\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T G_n dW \right)^2 \right).$$

Ahora, puesto que G_n es un proceso de escalera tenemos que

$$E \left(\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T G_n dW \right)^2 \right) = E \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T G_n^2 dt \right) = E \left(\int_0^T G^2 dt \right).$$

Por último, veamos iv). Para ello, utilizaremos que $2ab = (a + b)^2 - a^2 - b^2$.

$$\begin{aligned}2E \left(\int_0^T G dW \int_0^T H dW \right) &= E \left(\left(\int_0^T (G + H) dW \right)^2 \right) - E \left(\left(\int_0^T G dW \right)^2 \right) \\ &\quad - E \left(\left(\int_0^T H dW \right)^2 \right)\end{aligned}$$

Puesto que acabamos de ver que $E \left(\left(\int_0^T G dW \right)^2 \right) = E \left(\int_0^T G^2 dt \right)$, deducimos que

$$\begin{aligned}2E \left(\int_0^T G dW \int_0^T H dW \right) &= E \left(\int_0^T (G + H)^2 dt \right) - E \left(\int_0^T G^2 dt \right) \\ &\quad - E \left(\int_0^T H^2 dt \right).\end{aligned}$$

Desarrollando $(G + H)^2$, utilizando que la integral de la suma de dos procesos estocásticos es la suma de las integrales de los procesos y en virtud de la linealidad de la esperanza llegamos a que

$$\begin{aligned} 2E \left(\int_0^T G dW \int_0^T H dW \right) &= E \left(\int_0^T G^2 dt \right) + E \left(\int_0^T H^2 dt \right) \\ &\quad + 2E \left(\int_0^T GH dt \right) - E \left(\int_0^T G^2 dt \right) \\ &\quad - E \left(\int_0^T H^2 dt \right) \\ &= 2E \left(\int_0^T GH dt \right) \end{aligned}$$

Por tanto queda demostrado que

$$E \left(\int_0^T G dW \int_0^T H dW \right) = E \left(\int_0^T GH dt \right).$$

□

Con lo cual, finalizando esta sección hemos logrado dar una definición de $\int_0^T G dW$ para un amplio rango de procesos estocásticos.

2.2. Fórmula de Itô

En esta sección trataremos la fórmula de Itô. Esta fórmula es importante, ya que es una herramienta útil para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas y comprobar la solución de las mismas, como veremos más adelante. Además veremos cómo se aplica a algunos ejemplos y estudiaremos nociones nuevas como diferencial estocástica y la regla del producto de Itô.

Para comenzar, estudiaremos qué representa dX cuando X es un proceso estocástico.

Definición 2.9. Sea $X(r)$ un proceso estocástico que toma valores reales satisfaciendo que

$$X(r) = X(s) + \int_s^r F dt + \int_s^r G dW$$

para algún $F \in \mathbb{L}^1(0, T)$, $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$ con $0 \leq s \leq t \leq T$. Entonces decimos que $X(r)$ tiene diferencial estocástica

$$dX = F dt + G dW$$

para $0 \leq t \leq T$.

A continuación, presentaremos el teorema principal de la sección, donde se desarrolla la fórmula de Itô.

Teorema 2.1 (Fórmula de Itô). Sea $X(t)$ un proceso estocástico que tiene diferencial estocástica

$$dX = Fdt + GdW$$

con $F \in \mathbb{L}^1(0, T)$, $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$. Sea $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que existen las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ y son continuas. Denotamos

$$Y(t) := u(X(t), t).$$

Entonces Y tiene diferencial estocástica

$$dY = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}G^2dt = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}F + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}G^2\right)dt + \frac{\partial u}{\partial x}GdW. \quad (2.7)$$

Demostración. Comenzaremos probando dos casos particulares de diferencial estocástica. Estos dos casos nos servirán para probar la regla del producto de Itô, que la utilizaremos para demostrar la fórmula de Itô.

- Veamos que $d(W^2) = 2WdW + dt$.

Esto es inmediato por la definición de Itô (2.3).

- Ahora, probemos que $d(tW) = Wdt + tdW$.

Notamos que

$$\int_0^r tdW = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} t_{n_k} (W(t_{n_{k+1}}) - W(t_{n_k})),$$

donde $P_n = \{0 = t_{n_0} < t_{n_1} < \dots < t_{n_{m_n}} = r\}$ es una sucesión de particiones de $[0, r]$ con $|P_n| \rightarrow 0$. Del mismo modo, dado que el camino muestral $t \rightarrow W(t)$ es continuo se tiene que

$$\int_0^r Wdt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} (W(t_{n_{k+1}}) - W(t_{n_k})),$$

puesto que para casi todo ω la serie es una serie de aproximación de Riemann ordinaria y para ello podemos tomar extremo derecho del intervalo $[t_{n_k}, t_{n_{k+1}}]$ en el cual evaluamos el integrando.

Así, sumando las dos fórmulas tenemos que

$$\int_0^r tdW + \int_0^r Wdt = rW(r). \quad (2.8)$$

A continuación, probaremos una última herramienta necesaria en la demostración: la regla del producto de Itô.

Supongamos que tenemos

$$\begin{cases} dX_1 = F_1dt + G_1dW \\ dX_2 = F_2dt + G_2dW \end{cases}$$

con $0 \leq t \leq T$ y para $F_1, F_2 \in \mathbb{L}^1(0, T)$, $G_1, G_2 \in \mathbb{L}^2(0, T)$. Entonces

$$d(X_1 X_2) = X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + G_1 G_2 dt. \quad (2.9)$$

Para facilitar la demostración, asumimos que $X_1(0) = X_2(0) = 0$. Así, tenemos que

$$X_i(t) = F_i t + G_i W(t) \text{ con } i=1, 2.$$

Con lo cual, sustituyendo dX_1, dX_2

$$\begin{aligned} \int_0^r X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + G_1 G_2 dt &= \int_0^r (X_1 F_2 + X_2 F_1) dt \\ &\quad + \int_0^r (X_1 G_2 + X_2 G_1) dW + \int_0^r (G_1 G_2) dt. \end{aligned}$$

Sea $g(r) := \int_0^r (X_1 F_2 + X_2 F_1) dt + \int_0^r (X_1 G_2 + X_2 G_1) dW + \int_0^r (G_1 G_2) dt$.

Ahora si sustituimos $X_1(t) = F_1 t + G_1 W(t)$, $X_2(t) = F_2 t + G_2 W(t)$ llegamos a que

$$\begin{aligned} g(r) &= \int_0^r ((F_1 t + G_1 W) F_2 + (F_2 t + G_2 W) F_1) dt \\ &\quad + \int_0^r ((F_1 t + G_1 W) G_2 + (F_2 t + G_2 W) G_1) dW + G_1 G_2 r \\ &= F_1 F_2 r^2 + (G_1 F_2 + G_2 F_1) \left(\int_0^r W dt + \int_0^r t dW \right) \\ &\quad + 2G_1 G_2 \int_0^r W dW + G_1 G_2 r. \end{aligned}$$

Ahora usando que $2 \int_0^r W dW = W^2(r) - r$ y (2.8) deducimos que

$$\begin{aligned} \int_0^r (X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + G_1 G_2) dt &= F_1 F_2 r^2 + (G_1 F_2 + G_2 F_1) r W(r) + G_1 G_2 W^2(r) \\ &= X_1(r) X_2(r). \end{aligned}$$

Hemos probado la fórmula para el caso particular de $s = 0$, $X_i(0) = 0$. El caso en el que $s \geq 0$ y $X_1(s), X_2(s)$ tiene una prueba similar a la anterior.

En el caso que F_i, G_i sean procesos de escalera, basta aplicar el procedimiento anterior en cada intervalo $[t_k, t_{k+1})$ en el que está definido cada G_k , donde son v.a.'s constantes, y sumamos finalmente las expresiones de las integrales resultantes. Finalmente, en un caso general, seleccionamos procesos de escalera $F_{n_i} \in \mathbb{L}^1(0, T)$, $G_{n_i} \in \mathbb{L}^2(0, T)$ tales que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_0^T |F_{n_i} - F_i| dt \right) &\rightarrow 0. \\ \mathbb{E} \left(\int_0^T (G_{n_i} - G_i)^2 dt \right) &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

con $n \rightarrow \infty$ e $i = 1, 2$. Con ello, definimos

$$X_{n_i}(t) := X_i(0) + \int_0^t F_{n_i} ds + \int_0^t G_{n_i} dW.$$

Finalmente bastaría aplicar el método explicado en el caso que F_i, G_i sean procesos de escalera en el punto (s, r) y pasar a límites para obtener la fórmula

$$X_1(r)X_2(r) = X_1(s)X_2(s) + \int_s^r X_1 dX_2 + X_2 dX_1 + G_1 G_2 dt.$$

con lo que queda probada la regla del producto de Itô.

Ahora, vamos a concluir la demostración. Para ello, vamos a distinguir tres casos.

- 1) Comenzamos con el caso $u(x) = x^m$ con $m = 0, 1, 2, \dots$. Queremos ver que

$$d(X^m) = mX^{m-1}dX + \frac{1}{2}m(m-1)X^{m-2}G^2dt. \quad (2.10)$$

Procederemos por inducción en m . Está claro que para $m = 0, 1$ se satisface. Para $m = 2$ lo hemos visto en la prueba de la regla del producto de Itô (2.9).

Supongamos que (2.10) es cierta para $m-1$ y lo probamos para m con ayuda de la regla del producto de Itô

$$\begin{aligned} d(X^m) &= d(XX^{m-1}) \\ &= Xd(X^{m-1}) + X^{m-1}dX + (m-1)X^{m-2}G^2dt \\ &= X\left((m-1)X^{m-2}dX + \frac{1}{2}(m-1)(m-2)X^{m-3}G^2dt\right) \\ &\quad + (m-1)X^{m-2}G^2dt + X^{m-1}dX \\ &= mX^{m-1}dX + \frac{1}{2}m(m-1)X^{m-2}G^2dt. \end{aligned}$$

ya que $m-1 + \frac{1}{2}(m-1)(m-2) = \frac{1}{2}m(m-1)$.

Por tanto la fórmula de Itô se satisface para todo los polinomios en la variable x dado que el operador diferencial d es lineal.

- 2) Ahora, analizamos el caso $u(x, t) = f(x)g(t)$, donde f, g son polinomios. Tenemos que

$$\begin{aligned} d(u(X, t)) &= d(f(X)g) \\ &= f(X)dg + gdf(X) \\ &= f(X)g'dt + g\left(f'(X)dX + \frac{1}{2}f''(X)G^2dt\right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}G^2dt. \end{aligned}$$

Por tanto la fórmula de Itô se satisface para cualquier polinomio u de la forma

$$u(x, t) := \sum_{i=1}^m f_i(x)g_i(t).$$

Así, se verifica para toda función de polinomios en las variables x, t .

- 3) Por último, consideramos el caso en el que tenemos una secuencia de polinomios u_n . Esta secuencia de polinomios existe por el Teorema de aproximación de Weierstrass, dada una función continua f existe una secuencia de polinomios $p_n(x)$ que convergen uniformemente a f . Así tenemos una secuencia

de polinomios u_n que converge a u en cualquier subconjunto compacto de \mathbb{R} . Tomamos u_n tales que

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u, \quad \frac{\partial u_n}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial x} &\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Entonces, utilizando el procedimiento realizado en 2), sabemos que para $0 \leq r \leq T$,

$$\begin{aligned} u_n(X(r), r) - u_n(X(0), 0) &= \int_0^r \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{\partial u_n}{\partial x} F + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} G^2 \right) dt \\ &\quad + \int_0^r \frac{\partial u_n}{\partial x} G dW. \end{aligned}$$

Pasando a límites cuando $n \rightarrow \infty$ en esta expresión queda probada la fórmula de Itô en general. □

Vista la fórmula de Itô vamos a ver un ejemplo de cómo se aplica.

Ejemplo 2.1. Tomamos $X(t) = W(t)$, con lo cual $F = 0, G = 1$. Tomamos $u(x, t) = e^{\lambda x - \frac{\lambda^2 t}{2}}$. Entonces por la fórmula de Itô (2.7)

$$d \left(e^{\lambda W(t) - \frac{\lambda^2 t}{2}} \right) = \left(-\frac{\lambda^2}{2} e^{\lambda W(t) - \frac{\lambda^2 t}{2}} + \frac{\lambda^2}{2} e^{\lambda W(t) - \frac{\lambda^2 t}{2}} \right) dt + \lambda e^{\lambda W(t) - \frac{\lambda^2 t}{2}} dW.$$

Así, denotando $Y(t) = e^{\lambda W(t) - \frac{\lambda^2 t}{2}}$ llegamos a que

$$\begin{cases} dY = \lambda Y dW \\ Y(0) = 1 \end{cases}$$

es una ecuación diferencial estocástica, que las estudiaremos en el siguiente capítulo. Notamos que, en el cálculo estocástico la expresión $e^{\lambda W(t) - \frac{\lambda^2 t}{2}}$ tiene el mismo papel que $e^{\lambda t}$ en el cálculo ordinario.

Para finalizar esta sección, destacar que podemos realizar una generalización de la fórmula de Itô para varios procesos estocásticos $X_i(t)$ tal y como se recoge en el siguiente teorema.

Teorema 2.2 (Generalización de la fórmula de Itô). Supongamos que tenemos $dX_i = F_i dt + G_i dW$ donde $F_i \in \mathbb{L}^1(0, T)$, $G_i \in \mathbb{L}^2(0, T)$ para $i = 1, \dots, n$. Entonces si $u : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y sus derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ para $i, j = 1, \dots, n$ entonces

$$d(u(X_1, \dots, X_n, t)) = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} G_i G_j dt.$$

2.3. Algunos ejemplos de EDEs

Después de haber visto la integración estocástica y la fórmula de Itô podemos analizar ahora las ecuaciones diferenciales estocásticas. Veremos como la integración estocástica y la fórmula de Itô nos servirán de ayuda para resolver algunas de estas ecuaciones. En esta sección, daremos la definición formal de solución de ecuación diferencial estocástica así como mostraremos y resolveremos algunos ejemplos.

Comenzamos introduciendo la definición formal de ecuación diferencial estocástica.

Definición 2.10. *Decimos que un proceso estocástico $X(t)$ es solución de la ecuación diferencial estocástica (EDE)*

$$\begin{cases} dX = b(X, t)dt + B(X, t)dW \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (2.11)$$

para $0 \leq t \leq T$, satisfaciendo

- i) $X(t)$ es progresivamente medible con respecto de $\mathcal{F}(t)$.
- ii) $b(X, t) \in \mathbb{L}^1(0, T)$.
- iii) $B(X, t) \in \mathbb{L}^2(0, T)$.
- iv) $X(t) = X_0 + \int_0^t b(X, s)ds + \int_0^t B(X, s)dW$ casi seguro para todo $0 \leq t \leq T$.

A continuación vamos a ver un ejemplo sencillo de EDE. Utilizaremos la fórmula de Itô para verificar la solución.

Ejemplo 2.2. *Sean f, g dos funciones continuas. La única solución de la EDE*

$$\begin{cases} dX = fXdt + gXdW \\ X(0) = 1 \end{cases} \quad (2.12)$$

es $X(t) = e^{\int_0^t f - \frac{1}{2}g^2 ds + \int_0^t g dW}$. Comprobémoslo,

Llamamos $Y(t) := \int_0^t f - \frac{1}{2}g^2 ds + \int_0^t g dW$, y por tanto $dY = (f - \frac{1}{2}g^2)dt + g dW$. Ahora por la fórmula de Itô con $u(x) = e^x$ tenemos que $X = e^Y$ satisface

$$\begin{aligned} dX &= \frac{\partial u}{\partial x} dY + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} g^2 dt \\ &= e^Y dY + \frac{1}{2} e^Y g^2 dt \\ &= e^Y \left((f - \frac{1}{2}g^2)dt + g dW + \frac{1}{2}g^2 dt \right) \\ &= e^Y (f dt + g dW). \end{aligned}$$

por tanto $dX = fXdt + gXdW$ como queríamos ver.

Ahora, daremos un par de ejemplos de EDEs. Algunos los volveremos a ver en el capítulo 3, ya que son de interés puesto que se usan como modelos matemáticos.

Ejemplo 2.3. Sea $P(t)$ el precio de una acción en tiempo t . Llamamos a las constantes $\mu > 0, \sigma$ la tendencia y la volatilidad de la acción. El modelo matemático que evalúa el cambio relativo del precio es el siguiente

$$\frac{dP}{P} = \mu dt + \sigma dW.$$

Así, la EDE sería la siguiente

$$\begin{cases} dP = \mu P dt + \sigma P dW \\ P(0) = p_0 \end{cases} \quad (2.13)$$

donde p_0 denota el precio inicial. Veamos cual es la solución de esta EDE. Tenemos que, por la fórmula de Itô,

$$\begin{aligned} d(\log(P)) &= \frac{dP}{P} - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 P^2 dt}{P^2} \\ &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW. \end{aligned}$$

Por tanto, al igual que en el ejemplo anterior, la solución será de la forma

$$P(t) = p_0 e^{\sigma W(t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}$$

Ejemplo 2.4 (Ecuación de Langevin). Esta ecuación destaca en la física debido a que modela las fuerzas de fricción del movimiento de una partícula browniana. La ecuación para la velocidad de la partícula es la siguiente

$$\begin{cases} dX = -bX + X\sigma dW \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (2.14)$$

donde b es un coeficiente de fricción positivo y σ un coeficiente de difusión. $X(t)$ representa la velocidad de la partícula browniana. Dicha ecuación tiene como solución

$$X(t) = e^{-bt} X_0 + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} dW \text{ para } t \geq 0.$$

Ejemplo 2.5 (Método de resolución de EDE lineal). Consideramos la siguiente EDE

$$\begin{cases} dX = g(t)X dt + f(t)X dW \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Vamos a buscar una solución del tipo $X(t) = X_1(t)X_2(t)$, donde

$$\begin{cases} dX_1 = f(t)X_1 dW \\ X_1(0) = X_0 \end{cases} \quad (2.15)$$

y además

$$\begin{cases} dX_2 = a(t)dt + h(t)dW \\ X_2(0) = X_0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Las funciones $a(t), h(t)$ las escogeremos durante el procedimiento según mejor nos convenga. Con lo cual por la regla del producto de Itô

$$\begin{aligned} dX &= d(X_1 X_2) = X_1 dX_2 + X_2 dX_1 + f(t) X_1 h(t) dt \\ &= f(t) X dW + (X_1 dX_2 + f(t) X_1 h(t) dt), \end{aligned}$$

Ahora escogemos $a(t), h(t)$ de forma que satisfaga

$$dX_2 + f(t) h(t) dt = g(t) X_2 dt.$$

Con lo cual, debe ser $h(t) = 0$ y $a(t) = g(t) X_2$. Con lo cual tenemos

$$\begin{cases} dX_2 = g(t) X_2 dt \\ X_2(0) = 1 \end{cases}$$

Sabemos que la solución es $X_2 = e^{\int_0^t g(s) ds}$ y dado que la solución de (2.15) es

$$X_1 = X_0 e^{\int_0^t f(s) dW - \frac{1}{2} \int_0^t f^2 ds},$$

llegamos a que

$$X(t) = X_1(t) X_2(t) = X_0 e^{\int_0^t f(s) dW + \int_0^t g(s) ds - \frac{1}{2} \int_0^t f^2 ds}.$$

2.4. Teorema de existencia y unicidad

En esta sección del capítulo daremos el resultado más importante de las EDEs: el Teorema de existencia y unicidad de solución. Para ello necesitaremos del Lema de Gronwall.

Lema 2.3 (Lema de Gronwall). Sean ϕ y f funciones continuas no negativas definidas para $0 \leq t \leq T$, y $c_0 \geq 0$ una constante. Si se cumple que

$$\phi(t) \leq c_0 + \int_0^t f \phi ds \text{ para todo } 0 \leq t \leq T$$

entonces

$$\phi(t) \leq c_0 e^{\int_0^t f ds} \text{ para todo } 0 \leq t \leq T.$$

Demostración. Consideramos $\Phi(t) := c_0 + \int_0^t f \phi ds$. Por tanto si derivamos $\Phi(t)$ tenemos $\Phi' = f \phi \leq f \Phi$, y por tanto

$$\left(e^{-\int_0^t f ds} \Phi \right)' = (\Phi' - f \Phi) e^{-\int_0^t f ds} \leq (f \phi - f \Phi) e^{-\int_0^t f ds} = 0,$$

Así,

$$\Phi(t) e^{-\int_0^t f ds} \leq \Phi(0) e^{-\int_0^0 f ds} = c_0,$$

y finalmente

$$\phi(t) \leq \Phi(t) \leq c_0 e^{\int_0^t f ds}.$$

□

A continuación, introducimos el Teorema de existencia y unicidad de EDEs, así como su demostración.

Teorema 2.3 (Teorema de existencia y unicidad). Sean $b : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ y $B : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas que satisfacen las siguientes condiciones:

i)

$$\begin{aligned} |b(x_1, t) - b(x_2, t)| &\leq l |x_1 - x_2| \\ |B(x_1, t) - B(x_2, t)| &\leq l |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq T$ y cierta constante $l > 0$.

ii) X_0 es una v.a. que toma valores reales tal que $E(|X_0|^2) < +\infty$.

iii) X_0 es independiente de $\mathcal{W}^+(0) := \mathcal{U}(W(s) - W(0) : s \geq 0)$, con $W(t)$ un movimiento browniano unidimensional.

entonces existe una única solución $X(t) \in \mathbb{L}^2(0, T)$ de la EDE

$$\begin{cases} dX = b(X, t)dt + B(x, t)dW \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Observación 2.2. Las hipótesis i) significa que b y B son uniformemente Lipschitz-continuas en la variable x .

Teorema existencia y unicidad. Comenzaremos probando la unicidad. Supongamos que X_1 y X_2 son soluciones de la EDE. Entonces para todo $0 \leq t \leq T$ se tiene que,

$$X_1(t) - X_2(t) = \int_0^t b(X_1, s) - b(X_2, s)ds + \int_0^t B(X_1, s) - B(X_2, s)dW.$$

Utilizando que $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ podemos estimar

$$\begin{aligned} E(|X_1 - X_2|^2) &\leq 2E\left(\left|\int_0^t b(X_1, s) - b(X_2, s)ds\right|^2\right) \\ &\quad + 2E\left(\left|\int_0^t B(X_1, s) - B(X_2, s)dW\right|^2\right). \end{aligned}$$

Entonces, en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwarz que implica

$$\left(\left|\int_0^t f ds\right|^2\right) \leq t \int_0^t |f|^2 ds \quad (2.17)$$

para todo $t > 0$ y una función $f : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} E\left(\left|\int_0^t b(X_1, s) - b(X_2, s)ds\right|^2\right) &\leq TE\left(\int_0^t |b(X_1, s) - b(X_2, s)|^2 ds\right) \\ &\leq l^2 T \int_0^t E(|X_1 - X_2|^2) ds, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es debido a la hipótesis i) del Teorema de existencia y unicidad. Así,

$$\mathbb{E} \left(\left| \int_0^t B(X_1, s) - B(X_2, s) dW \right|^2 \right) = \mathbb{E} \left(\int_0^t |B(X_1, s) - B(X_2, s)|^2 ds \right).$$

Esto es debido a la propiedad iv) de [2.2](#). Con lo cual

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t |B(X_1, s) - B(X_2, s)|^2 ds \right) \leq l^2 \int_0^t \mathbb{E} (|X_1 - X_2|^2) ds.$$

que al igual que antes, es debido a la hipótesis i). Con lo cual para una determinada constante c (dependiente de l y T), llegamos a que

$$\mathbb{E} (|X_1 - X_2|^2) \leq c \int_0^t \mathbb{E} (|X_1 - X_2|^2),$$

Si definimos $\phi(t) := \mathbb{E} (|X_1(t) - X_2(t)|^2)$ y sustituimos en la desigualdad anterior tenemos que

$$\phi(t) \leq c \int_0^t \phi(s) ds \text{ para todo } 0 \leq t \leq T.$$

Por el lema de Gronwall, como $c_0 = 0$ entonces, $\phi \equiv 0$. Así, $X_1(t) = X_2(t)$ casi seguro para todo t y queda probada la unicidad de solución.

Ahora, demostraremos la existencia de solución. Definimos,

$$X_{n+1}(t) := X_0 + \int_0^t b(X_n(s), s) ds + \int_0^t B(X_n(s), s) dW,$$

para $n = 0, 1, \dots$ y $0 \leq t \leq T$.

Llamamos $d_n(t) := \mathbb{E} (|X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2)$, y queremos probar lo siguiente

$$d_n(t) \leq \frac{(mt)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ para todo } n = 0, \dots, \text{ y } 0 \leq t \leq T$$

para alguna constante m dependiente de T, l y X_0 . Para probarlo procederemos por inducción

$$\begin{aligned} d_0(t) &= \mathbb{E} (|X_1(t) - X_0(t)|^2) \\ &= \mathbb{E} \left(\left| \int_0^t b(X_0, s) ds + \int_0^t B(X_0, s) dW \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Ahora, utilizando de nuevo que $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ y la hipótesis ii) llegamos a que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left| \int_0^t b(X_0, s) ds + \int_0^t B(X_0, s) dW \right|^2 \right) &\leq 2\mathbb{E} (|l(1 + |X_0|)ds|^2) + 2\mathbb{E} (l^2(1 + |X_0|^2)ds) \\ &\leq Tm. \end{aligned}$$

para alguna constante m suficientemente grande. Con lo cual se verifica para $n = 0$. Ahora, lo suponemos cierto para $n - 1$ y queremos probarlo para n .

$$\begin{aligned}
d_n &= E(|X_{n+1}(t) - X_n(t)|^2) \\
&= E\left(\left|\int_0^t (b(X_n, s) - b(X_{n-1}, s))ds + \int_0^t (B(X_n, s) - B(X_{n-1}, s))dW\right|^2\right) \\
&\leq 2E\left(\left|\int_0^t (b(X_n, s) - b(X_{n-1}, s))ds\right|^2\right) \\
&\quad + 2E\left(\left|\int_0^t (B(X_n, s) - B(X_{n-1}, s))dW\right|^2\right) \\
&\leq 2E\left(t \int_0^t |b(X_n, s) - b(X_{n-1}, s)|^2 ds\right) \\
&\quad + 2E\left(\int_0^t |B(X_n, s) - B(X_{n-1}, s)|^2 ds\right).
\end{aligned}$$

Entonces como $b(X_i, s)$ y $B(X_i, s)$ son Lipschitz-continuas,

$$\begin{aligned}
d_n &\leq 2Tl^2 E\left(\int_0^t |X_n - X_{n-1}|^2 ds\right) + 2l^2 E\left(\int_0^t |X_n - X_{n-1}|^2 ds\right) \\
&\leq 2l^2(1 + T) \int_0^t \frac{m^n s^n}{n!} ds \\
&\leq \frac{m^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!},
\end{aligned}$$

donde hemos tomado $m \geq 2l^2(1 + T)$. Notemos ahora que,

$$\begin{aligned}
\max_{0 \leq t \leq T} |X_{n+1} - X_n|^2 &\leq \max_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (b(X_n, s) - b(X_{n-1}, s))ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t (B(X_n, s) - B(X_{n-1}, s))dW \right|^2
\end{aligned}$$

Del mismo modo, como $b(X_i, s)$ y $B(X_i, s)$ son Lipschitz-continuas y utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (2.17),

$$\begin{aligned}
\max_{0 \leq t \leq T} |X_{n+1} - X_n|^2 &\leq 2Tl^2 \int_0^T |X_n - X_{n-1}|^2 ds \\
&\quad + 2 \max_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^T (B(X_n, s) - B(X_{n-1}, s))dW \right|^2 \\
&\leq 2Tl^2 \int_0^T |X_n - X_{n-1}|^2 ds \\
&\quad + 2l^2 \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^T |X_n - X_{n-1}|^2 ds.
\end{aligned}$$

Por tanto, debido a la desigualdad de la martingala [A.2](#) llegamos a que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \left(\max_{0 \leq t \leq T} |X_{n+1} - X_n|^2 \right) &\leq 2Tl^2 \int_0^T \mathbf{E} (|X_n - X_{n-1}|^2) ds \\
&\quad + 8l^2 \int_0^T \mathbf{E} (|X_n - X_{n-1}|^2) ds \\
&\leq 2l^2(T+4) \int_0^t \mathbf{E} (|X_n - X_{n-1}|^2) ds \\
&\leq 2l^2(T+4) \int_0^t d_{n-1}(s) ds \\
&\leq 2l^2(T+4) \int_0^t \frac{(ms)^n}{n!} ds \\
&\leq \frac{c(mT)^{n+1}}{(n+1)!},
\end{aligned}$$

para cierta constante c . Entonces, utilizando la desigualdad de Chebyshev [A.3](#) llegamos a que

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} \left(\max_{0 \leq t \leq T} |X_{n+1} - X_n| > \frac{1}{2^n} \right) &\leq 2^{2n} \mathbf{E} \left(\max_{0 \leq t \leq T} |X_{n+1} - X_n|^2 \right) \\
&\leq 2^{2n} \frac{c(mT)^{n+1}}{(n+1)!},
\end{aligned}$$

Veamos la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} \frac{(mT)^{n+1}}{(n+1)!}$. Utilizaremos el criterio del cociente, tomando como término general de la serie $a_n = 2^{2n} \frac{(mT)^{n+1}}{(n+1)!}$. Así, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2(n+2)} \frac{(mT)^{n+2}}{(n+2)!}}{2^{2(n+1)} \frac{(mT)^{n+1}}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2 mT}{n+2} = 0.$$

Con lo cual, por la regla del criterio del cociente dado que el límite obtenido es menor que 1, la serie converge. Entonces podemos usar el lema de Borel-Cantelli. Con lo cual

$$\mathbf{P} \left(\max_{0 \leq t \leq T} |X_{n+1} - X_n| > \frac{1}{2^n} \text{ i.o.} \right) = 0.$$

Por tanto, debe ser $\max_{0 \leq t \leq T} |X_{n+1} - X_n| \leq \frac{1}{2^n}$.

En consecuencia, para casi todo ω se tiene que $X_n(t, \omega) = X_0 + \sum_{j=0}^{n-1} (X_{j+1}(t, \omega) - X_j(t, \omega))$ converge uniformemente en $[0, T]$ a un proceso estocástico $X(t)$. Finalmente, tomando el límite se prueba que $X(t)$ verifica

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(X, s) ds + \int_0^t B(X, s) dW,$$

y así obtenemos que

$$\begin{cases} dX = b(X, t)dt + B(X, t)dW \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

para $0 \leq t \leq T$.

Por último, probemos que $X(t) \in \mathbb{L}^2(0, T)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_{n+1}(t)|^2) &\leq c\mathbb{E}(|X_0|^2) + c\mathbb{E}\left(\left|\int_0^t b(X_n, s)ds\right|^2\right) \\ &\quad + c\mathbb{E}\left(\left|\int_0^t B(X_n, s)dW\right|^2\right) \\ &\leq c(1 + \mathbb{E}(|X_0|^2)) + c\int_0^t \mathbb{E}(|X_n|^2)ds. \end{aligned}$$

Entonces por inducción, siguiendo la desigualdad anterior de forma iterativa llegamos a que

$$\mathbb{E}(|X_{n+1}(t)|^2) \leq \left(c + c^2 + \dots + c^{n+2} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right) (1 + \mathbb{E}(|X_0|^2)).$$

Puesto que $\left(1 + c + \dots + c^{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right)$ es el desarrollo de e^{ct} deducimos que

$$\mathbb{E}(|X_{n+1}(t)|^2) \leq c(1 + \mathbb{E}(|X_0|^2)) e^{ct}.$$

Tomando límites tenemos que

$$\mathbb{E}(|X(t)|^2) \leq c(1 + \mathbb{E}(|X_0|^2)) e^{ct},$$

con lo cual $X(t) \in \mathbb{L}^2(0, T)$ como queríamos probar. \square

2.4.1. Dependencia continua del dato inicial

Supongamos que tenemos dos soluciones X e Y de una la misma EDE, donde las funciones b y B satisfacen las condiciones del Teorema de existencia y unicidad, pero con condiciones iniciales diferentes es decir,

$$\begin{cases} dX = b(X, t)dt + B(X, t)dW \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

y con lo cual $X(t) = X_0 + \int_0^t b(X, s)ds + \int_0^t B(X, s)dW$.

Del mismo modo,

$$\begin{cases} dY = b(Y, t)dt + B(Y, t)dW \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

así $Y(t) = Y_0 + \int_0^t b(Y, s)ds + \int_0^t B(Y, s)dW$.

Entonces la diferencia entre las soluciones satisface que

$$|X - Y| = |X_0 - Y_0| + \int_0^t |b(X, s) - b(Y, s)|ds + \int_0^t |B(X, s) - B(Y, s)|dW$$

Puesto que las funciones b y B son Lipschitz-continuas se tiene que

$$|X - Y| \leq |X_0 - Y_0| + \int_0^t l|X - Y|ds + \int_0^t l|X - Y|dW.$$

Si denotamos $Z = |X - Y|$, $Z_0 = |X_0 - Y_0|$ tenemos que

$$Z \leq Z_0 + \int_0^T lZ dt + \int_0^T lZ dW. \quad (2.18)$$

Tomando esperanzas, veamos cómo podemos acotar

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T lZ dW \right)^2 \leq l^2 \int_0^T \mathbb{E}(Z)^2 ds, \quad (2.19)$$

Por otro lado, de (2.18) tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z)^2 &\leq \mathbb{E}(Z_0)^2 + \mathbb{E} \left(\int_0^T lZ dt \right)^2 + \mathbb{E} \left(\int_0^T lZ dW \right)^2 \\ &\leq \mathbb{E}(Z_0)^2 + 2l^2 T \int_0^T \mathbb{E}(Z)^2 dt + 2l^2 \int_0^T \mathbb{E}(Z)^2 dt \\ &\leq \mathbb{E}(Z_0)^2 + (2l^2 T + 2l^2) \int_0^T \mathbb{E}(Z)^2 ds, \end{aligned}$$

ya que $\mathbb{E}(Z_0)^2 > 0$ y $\mathbb{E}(Z_0) < +\infty$. Así, en virtud del lema de Gronwall tenemos que

$$\mathbb{E}(Z)^2 \leq \mathbb{E}(Z_0)^2 e^{(2l^2 T + 2l^2)t}.$$

Por tanto, queda probada la dependencia continua del dato inicial en las EDEs.

Capítulo 3

Simulaciones

Los modelos matemáticos de EDEs tienen un papel muy importante en aplicaciones a múltiples áreas como biología, química, epidemiología, farmacología, mecánica, finanzas ... En este capítulo trataremos de dar un método numérico sencillo para simular EDEs con el soporte del programa MATLAB. Así mismo, realizaremos simulaciones aplicadas a diferentes áreas de estudio como la farmacología o las finanzas. El método numérico que utilizaremos es el método de Euler. Dicho método es análogo al utilizado para ecuaciones diferenciales ordinarias.

3.1. Método de Euler

Supongamos que tenemos la siguiente EDE

$$\begin{cases} dX = b(X, t)dt + B(X, t)dW \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

o equivalentemente

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(X, s)ds + \int_0^t B(X, s)dW$$

con $0 \leq t \leq T$.

Vamos a definir el método numérico de Euler para resolver dicha EDE. Para ello, comenzamos discretizando el intervalo $[0, T]$ en el que estamos trabajando. Llamamos $\delta t = \frac{T}{N}$, donde N es un entero positivo para dividir el intervalo.

Entonces, el método de Euler aproxima la solución del siguiente modo

$$X_j = X_{j-1} + b(X_{j-1}, t)\delta t + B(X_{j-1}, t)(W(t) - W(t-1)), \quad (3.1)$$

con $j = 1, 2, \dots, N$.

Sabemos que los incrementos del movimiento brownianos siguen una distribución $N(0, \delta t)$. Entonces podremos simular estos incrementos utilizando dicha distribución. Con lo cual, la aproximación resulta del siguiente modo

$$X_j = X_{j-1} + b(X_{j-1}, t)\delta t + B(X_{j-1}, t)N(0, \delta t). \quad (3.2)$$

Así, observamos que computacionalmente es muy sencillo simular una EDE. Una vez conocido el método que emplearemos, vamos a realizar simulaciones de EDEs aplicadas a diferentes campos de estudio.

3.2. Simulación en el precio de las acciones

La relación existente entre el movimiento browniano y la fluctuación en el precio de las acciones comenzó a estudiarse a partir de que, en 1900, el economista francés Bachelier manifestara que existía una relación entre estos dos fenómenos. Una acción es un título que emite una sociedad el cual representa el valor de cada fracción equitativa en la que se divide el capital social de la sociedad. Los inversores compran estas acciones con la esperanza de que el valor de las mismas incremente y obtener así un beneficio de ellas.

Modelaremos este fenómeno utilizando la ecuación de Black-Scholes, que ya fue tratada en [2.3](#)

$$X(t) = \mu X dt + \sigma X dW. \quad (3.3)$$

La tendencia μ indica la dirección o rumbo que toman los precios en el mercado financiero, mientras que la volatilidad σ se asocia al movimiento, la variabilidad, la oscilación y la dispersión de los precios. Es decir, mide la frecuencia e intensidad de los cambios del precio de la acción.

Vamos a simular el comportamiento del precio de las acciones de una empresa industrial australiana durante un periodo de cinco años. Se han realizado varias simulaciones de la fluctuación del precio de las acciones, dado que al simular los crecimientos del movimiento browniano con $N(0, \delta t)$ en cada simulación nos va a retornar un valor diferentes. Además, la trayectoria de color negro indica el valor medio de dichas trayectorias. La tendencia, volatilidad y precio base de dicha empresa han sido obtenidas de la siguiente fuente [\[10\]](#). El código de la simulación se encuentra en [B.1](#)

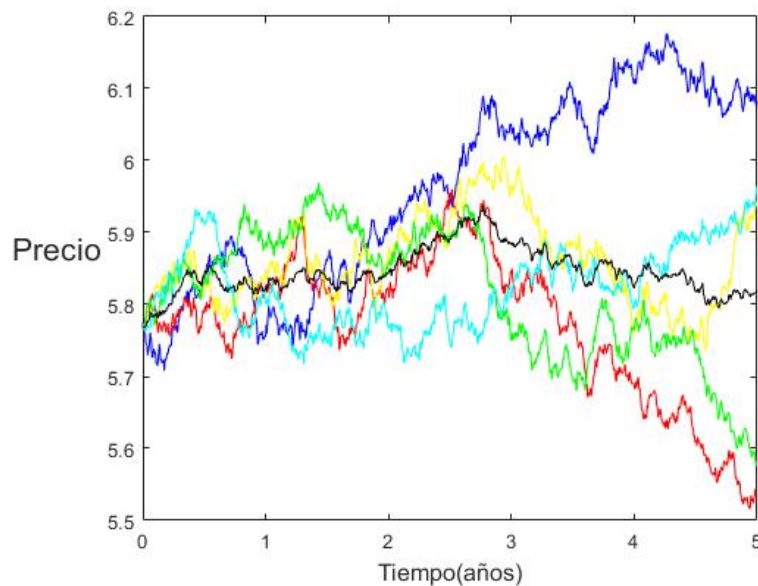


Figura 3.1: Simulación del precio de acciones de una empresa

Empresa	Precio Inicial	Tendencia	Volatilidad
Industrial	5.77	0.00447	0.244

Cuadro 3.1: Datos utilizados en la simulación

Observamos como la trayectoria negra que indica el valor medio de las simulaciones no experimenta grandes crecimientos, siendo en el tercer año donde alcanza su valor más alto y a comenzando un decrecimiento progresivo a partir de él. A pesar de que la trayectoria azul tiene un gran crecimiento durante los cinco años, se contrarresta con la trayectoria roja que posee un decrecimiento claro, con lo cual la trayectoria media se estabiliza.

3.3. Simulación en farmacocinética

La farmacocinética es el área de la farmacología que estudia el comportamiento que experimenta un fármaco desde su introducción en un organismo hasta su completa eliminación. Uno de los intereses fundamentales de la farmacocinética es estudiar las velocidades de cambio de concentración del fármaco en el organismo. Con lo cual, es importante poder construir modelos que nos ayuden a interpretar los datos experimentales obtenidos. Conociendo las características básicas de un fármaco podemos construir un modelo matemático para estudiar su comportamiento.

De acuerdo a [5], los modelos que se utilizan para este estudio reciben el nombre de modelos de compartimento. En estos modelos se supone que el organismo está dividido en diferentes secciones donde el fármaco realizará su función. Esto es razonable debido que cada tejido, célula poseen características diferentes y el comportamiento del fármaco en un lugar u otro será distinto. Podemos pensar entonces que un organismo está formado por varios compartimentos donde en cada uno de ellos el fármaco tiene las mismas propiedades químicas y cinéticas y el comportamiento del mismo es uniforme. El modelo más sencillo, que será el que nosotros asumiremos para esta clase de modelos de compartimento, es el llamado modelo abierto. En él, se supone que el fármaco en el organismo se distribuye de un modo uniforme e instantánea. Además supondremos las velocidades de intercambio entre diferentes secciones del compartimento son iguales.

En ausencia de aleatoriedad los modelos de compartimentos analizan la concentración de fármaco existente con la siguiente ecuación

$$\frac{dC}{dt} = -K_e C(t) + f(t), \quad C(0) = \frac{D}{V} \quad (3.4)$$

donde $C(t)$ representa la concentración del medicamento en el instante t . K_e es una constante, estrictamente positiva, de eliminación del fármaco y $f(t)$ representa la función de entrada al organismo, que es proporcional a la velocidad de entrada.

La administración del fármaco se suele producir a velocidad constante que denotaremos como K_a y que claramente debe ser $K_a > 0$ en un intervalo $[0, T]$. Así, $f(t) = \frac{K_a}{V}$, siendo V el volumen del fármaco administrado y D la cantidad.

Sin embargo, la función de entrada esta sometida a perturbaciones impredecibles, como por ejemplo la variabilidad en la absorción pulmonar. Con lo cual, parece

razonable que para realizar un estudio más adecuado, debemos añadir un término estocástico a la función de entrada que le dote de aleatoriedad. Supongamos que una cantidad D se administra a una velocidad K_a en un intervalo temporal $[0, T]$ con una velocidad de entrada K_e . Para que la función de entrada adquiera aleatoriedad definimos

$$f(t) = r + \gamma W(t),$$

donde $r = \frac{K_a}{V}$, que representa el valor medio de la función de entrada y γ es el coeficiente de difusión. Así llegamos a la ecuación de Vasicek

$$dC = (r - K_e C(t))dt + \gamma dW, \quad C(0) = \frac{D}{V}. \quad (3.5)$$

Para finalizar esta sección, vamos a simular como varía la concentración de un fármaco administrado en un organismo. En dicha simulación compararemos como describe la variación de concentración una EDO con como lo describe (3.5). El código de la simulación se encuentra en B.2.

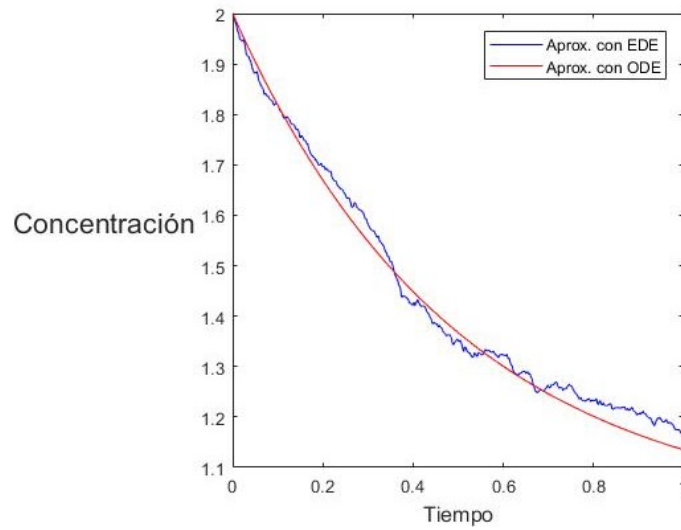


Figura 3.2: Simulación de la concentración de un fármaco

Constante	Valor
K_a	3
K_e	2
D	3
V	1.5
γ	1.7

Cuadro 3.2: Datos utilizados en la simulación

3.4. Simulación en epidemiología

La epidemiología estudia el control, distribución, frecuencia y factores determinantes de las enfermedades infecciosas. Existen una gran variedad de modelos matemáticos aplicados a epidemias. De dichos modelos podemos extraer información de las enfermedades o realizar. En esta sección nos centraremos en el modelo SIS adaptado a EDEs.

La población de individuos se divide en susceptibles $S(t)$ e infectados $I(t)$. Los individuos susceptibles pueden ser infectados al estar en contacto con la enfermedad. Además en el modelo SIS, los individuos infectados pueden recuperarse, pasando a ser susceptibles. Así las ecuaciones son

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta I(t)S(t) + \gamma I(t) + \mu N - \mu S(t), \\ \frac{dI}{dt} &= \beta I(t)S(t) - (\mu + \gamma)I(t).\end{aligned}$$

donde β es la tasa de contagio, N el número total de individuos, γ es la tasa de recuperación de individuos infectados y μ la tasa de mortalidad por individuo.

Nosotros queremos trasladarlo al caso de las EDEs debido a que en el mundo real estamos expuestos a múltiples factores que influyen en el comportamiento de las enfermedades y los organismos. Como consecuencia no siempre es posible realizar una predicción de que va a suceder, y por ello en el caso de pequeñas poblaciones es más adecuado utilizar un modelo estocástico. El modelo que vamos a usar asume que los cambios que se producen en el crecimiento de la población son muy variables debido a la aleatoriedad de los nacimientos y muertes que inciden en la población. El modelo estocástico extraído de [13] es el siguiente

$$\begin{aligned}dS &= (-\beta I(t)S(t) + \gamma I(t) + \mu N - \mu S(t)) dt + \sqrt{\beta I(t)S(t) + (\mu + \gamma)I(t)} dW, \\ dI &= (-\beta I(t)S(t) - (\mu + \gamma)I(t)) dt + \sqrt{\beta I(t)S(t) + (\mu + \gamma)I(t)} dW.\end{aligned}$$

Así, combinando las dos ecuaciones utilizando que $S + I = N$ llegamos a la EDE

$$dI = (\beta I(t)(N - I(t)) - (\mu + \gamma)I(t)) dt + \sqrt{\beta I(t)(N - I(t)) + (\mu + \gamma)I(t)} dW. \quad (3.6)$$

Por tanto, la versión determinista de la ecuación (3.6) sería

$$\frac{dI}{dt} = I(t) (\beta N - \beta I(t) - \mu - \gamma). \quad (3.7)$$

Ahora, vamos a comparar (3.7) y (3.6). Los datos de las constantes han sido extraídos de [13].

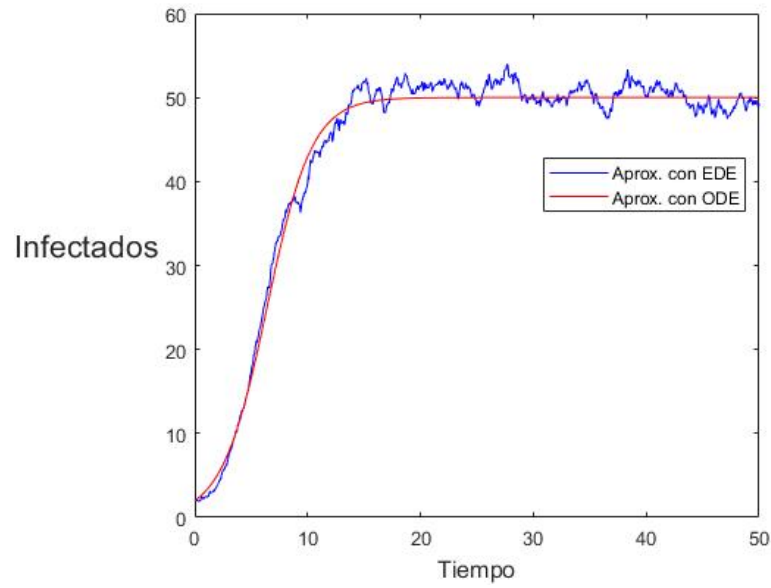


Figura 3.3: Simulación de los individuos afectados en una población.

Constante	Valor
I_0	2
N	100
β	1
μ	0.25
γ	0.25

Cuadro 3.3: Datos utilizados en la simulación

Observamos que en este caso debido a los valores de las constantes, el número de infectados crece rápidamente hasta el instante $t = 15$. A partir de ese instante, el número de infectados se mantiene estable en torno a 50 infectados. Como anticipamos el modelo de EDEs resalta, en su simulación, las fluctuaciones del crecimiento de una población pequeña. El código de la simulación se encuentra en [B.3](#).

Apéndice A

Resultados conocidos

En esta sección exponemos algunos resultados necesarios para hacer este trabajo autocontenido. Las demostraciones de dichos resultados no se mostrarán, pero se pueden consultar en [3], [4], [8] y [12].

Lema A.1 (Borel-Cantelli). Sean A_1, \dots, A_n sucesos definidos en un espacio probabilístico. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < \infty$, entonces

$$\mathbf{P}(A_n \text{ i.o.}) = 0.$$

Teorema A.1 (Laplace-DeMoivre). Sean X_1, \dots, X_n v.a.'s independientes idénticamente distribuidas con

$$\begin{cases} \mathbf{P}(X_i = 1) &= p \\ \mathbf{P}(X_i = 0) &= q \end{cases}$$

para $p, q \geq 0$, $p + q = 1$. Sea

$$S_n := X_1 + \dots + X_n.$$

Entonces para todo $-\infty < a < b < +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Lema A.2. Sea $[a, b]$ un intervalo en $[0, \infty)$ y suponemos que

$$P_n := \{a = t_{n_0} < t_{n_1} < \dots < t_{n_m} = b\}$$

son particiones del intervalo $[a, b]$ con $|P_n| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces

$$\sum_{k=0}^{n_m-1} (W(t_{n_{k+1}}) - W(t_{n_k}))^2 \rightarrow b - a$$

en $L^2(\Omega)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Lema A.3 (Desigualdad de Chebyshev). Sea X es una v.a. y $1 < p < +\infty$, entonces

$$\mathbf{P}(|X| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} E(|X|^p),$$

para todo $\lambda \geq 0$.

Teorema A.2 (Desigualdad de martingalas). *Sea $X(t)$ un proceso estocástico con caminos muestrales continuos c.s, si $X(t)$ es una martingala y $1 < p < +\infty$, entonces*

$$E\left(\max_{0 \leq s \leq t} |X(s)|^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E(|X(t)|^p).$$

Apéndice B

Códigos de MATLAB

B.1. Simulación en el precio de las acciones

```
%programa que simula el crecimiento del precio de las acciones
%de una empresa.
randn('state',100)
mu=0.00447;sigma=0.244; %valores de los parametros de la EDE
T=5;N=1000;deltat=T/N;
X=zeros(5,N);
X(:,1)=5.77;%condición inicial
for i=1:5
    for j=1:N
        X(i,j+1)=X(i,j)+mu*X(i,j)*deltat+sigma*X(i,j)*normrnd(0,deltat);
    end
end
plot([0:deltat:T],X(1,:), 'b-'),hold on
plot([0:deltat:T],X(2,:), 'r-'),hold on
plot([0:deltat:T],X(3,:), 'y-'),hold on
plot([0:deltat:T],X(4,:), 'g-'),hold on
plot([0:deltat:T],X(5,:), 'c-'),hold on
plot([0:deltat:T],sum(X)/5, 'k-'),hold off
xlabel('Tiempo(años)', 'FontSize',12)
ylabel('Precio', 'FontSize',16, 'Rotation',0, 'HorizontalAlignment', 'right')
%se muestran 5 simulaciones asi como su valor medio.
```

B.2. Simulación en la farmacocinética

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%FARMACOCINETICA%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
randn('state',100);
K=2;D=3;V=1.5;Kalpha=3;gamma=1.7; %valor de los parámetros
r=Kalpha/V;
T=1;N=500;deltat=T/N;
C=zeros(1,N);
```

```

C(1)=D/V; %condición inicial
for i=1:N
C(i+1)=C(i) + deltat*(r-K*C(i)) + gamma*normrnd(0,deltat);
end
C2(1)=D/V;
for j=1:N
    C2(j+1)=C2(j)+ deltat*(r-K*C2(j));
end
plot([0:deltat:T],C,'b-'),hold on
plot([0:deltat:T],C2,'r-'),hold off
xlabel('Tiempo','FontSize',12)
ylabel('Concentración','FontSize',16,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')
legend('Aprox. con EDE','Aprox. con ODE')

```

B.3. Simulación en epidemiología

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Modelo SIS para SDEs%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%P es el número de individuos total de la población
%I es el número de individuos afectados
%Beta es la tasa de contagio(>0)
%Gamma es el ratio de recuperación de los individuos(>0)
%b representa la tasa de mortalidad(debe ser geq 0)
randn('state',100);
T=50;N=1000;deltat=T/N;
I=zeros(1,N);
P=100;
Beta=1; Gamma=0.25; b=0.25;
I(1)=2;%numero de individuos afectados inicialmente
for j=1:N
    I(j+1)=I(j)+((Beta/P)*(P-I(j))*I(j)-(b+Gamma)*I(j))*deltat
    + sqrt(((Beta/P)*(P-I(j))*I(j)+(b+Gamma)*I(j)))*normrnd(0,deltat);

end
%version determinista
I2=zeros(1,N);
I2(1)=2;%numero de individuos afectados inicialmente
for i=1:N
    I2(i+1)=I2(i)+((Beta/P)*(P-I2(i))*I2(i)-(b+Gamma)*I2(i))*deltat;

end

plot([0:deltat:T],I,'b-'),hold on
plot([0:deltat:T],I2,'r-'),hold off
xlabel('Tiempo','FontSize',12)
ylabel('Infectados','FontSize',16,'Rotation',0,'HorizontalAlignment','right')

```

```
legend('Aprox. con EDE','Aprox. con ODE')  
%los valores de las ctes han sido extraidos de  
%https://ece.umd.edu/~rbhaskar/CMSC878BTermPaper.pdf
```


Bibliografía

- [1] ALLEN, E.J., *Modelling with Itô Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, London, (2007).
- [2] ALLMAN, E.S. y EHODES, J.A., *Mathematical Models in Biology*, Cambridge University Press, (2004), 279-314.
- [3] ASH, R.B. y DOLEANS-DADE, C., *Probability and Measure Theory*. Elsevier, (1999).
- [4] BILLINGSLEY, P., *Probability and Measure*, 3rd ed., (1995).
- [5] BRAVO ROJAS, R.I, *Ecuaciones Diferenciales Estocásticas en Modelos de Farmacocinética*, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, (2015).
- [6] CRESSON, J., PUIG, B. y SONNER, S., *Stochastic Models in Biology and the Invariance Problem*, Discrete and Continuous Dynamical Series B, Vol. 21, n.7, (2016), 2145-2168.
- [7] COLEMAN, R., *Procesos Estocásticos*, Limusa, (1976).
- [8] CUESTA, J.A., *Cálculo de Probabilidades*, Universidad de Cantabria.
- [9] DMOUJ, A., *Stock price modelling: Theory and practice*, Vrije Universiteit, (2006).
- [10] *Drift and volatility of market prices*, [en línea], [fecha de consulta: diciembre 2018].
Disponibile en: <http://www.lifelong-learners.com/opt/SYL/s1node6.php>
- [11] EL-SAYED, A.M.A., GAAFAAR, F. Y EL-GENDY, M., *Continuous Dependence of the Solution of Itô Stochastic Differential Equation with Nolocal Conditions*, Applied Mathematical Sciences, Vol.10, n.40, (2016), 1971-1982.
- [12] EVANS, LAWRENCE C., *An introduction to stochastic differential equations*, UC Berkeley, Version 1.2, (2013).
- [13] GREENHALGH, D., LIANG, Y. y MAO, X., *Demographic Stochasticity in the SDE SIS Epidemical Model*, University of Strathclyde, Glasgow, (2015).
- [14] HIGHAM, D.J., *An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations*, SIAM Review, Vol.43, n.3, (2001), 525-546.

- [15] KARATZAS, I. y STEVE, STEVEN E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, Second Edition, (1998).
- [16] LALLEY, STEVEN P., *Stochastic Differential Equations*, University of Chicago, (2016).
- [17] MCKNIGHT, A., *Some Basic Properties of Brownian Motion*, University of Chicago, (2009).
- [18] MOERTERS, P., *Brownian Motion*, University of Cambridge, (2010).
- [19] OKSENDAL, B., *Stochastic Differential Equations. An introduction with applications*, Springer Verlag, USA, Serie “Universitext”, 6th. ed., (2007).
- [20] RAMASUBRAMANIAN, B., *Stochastic Differential Equations in Population Dynamics: Numerical Analysis, Stability and Theoretical Perspectives*, (2013).
- [21] ROLAND, N.G., *Fourier and Wavelet Representation of Functions*, Electronic Journal of Undergraduate Mathematics, Furman University, Vol. 6, (2000), 1 – 12.